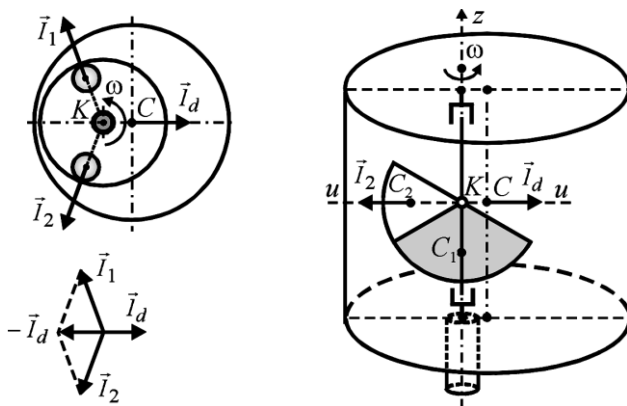


Г.Б.ФІЛІМОНІХІН

# ЗРІВНОВАЖЕННЯ І ВІБРОЗАХИСТ РОТОРІВ АВТОБАЛАНСИРАМИ З ТВЕРДИМИ КОРИГУВАЛЬНИМИ ВАНТАЖАМИ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Г.Б.Філімоніхін

**Зрівноваження і віброзахист роторів  
автобалансирами  
з твердими коригувальними вантажами**

Монографія  
(за спеціальністю 05.02.09 – динаміка та міцність машин)

Кіровоград 2004

## УДК 62-752+62-755:534.1

Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами: Монографія (за спеціальністю 05.02.09 - динаміка та міцність машин). - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.

Викладена інженерна (наближена) теорія пасивних автобалансирів (АБП) з твердими коригувальними вантажами (КВ), як систем, у яких КВ рухаються принаймні навколо однієї точки на повздовжній осі ротора. Досліджені геометричні і масо-інерційні характеристики КВ, кінематика їх рухів, різні схеми віброзахисту і зрівноваження ними роторів. Розроблений інженерний (наближений) метод визначення умов настання автобалансування, і з його застосуванням знайдені умови зрівноваження АБП як жорстких роторів при різному пружному закріпленні, так і гнучких роторів.

Розвинутий теоретичний і створений експериментальний метод дослідження процесу зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП. З їх застосуванням досліджена динаміка АБП з різним рухом КВ, зокрема - багатокульових і багатомаятникових. Відкриті і досліджені нові режими руху ротора з АБП, зокрема квазіперіодичні рухи.

Результати роботи можуть бути використані при проектуванні, випробуванні і впровадженні будь-яких типів пасивних АБП, призначених для зрівноваження будь-яких жорстких і гнучких роторів на закритичних швидкостях обертання. Робота призначена для фахівців у галузі автоматичного балансування і віброзахисту роторів, інженерно-технічних працівників та аспірантів.

**Автор:** кандидат фізико-математичних наук, доцент **Філімоніхін Геннадій Борисович**, Кіровоградський Національний технічний університет, доцент кафедри деталей машин та прикладної механіки

**Рецензенти:** доктор технічних наук, професор **Бабенко Андрій Єлєсійович**, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", професор кафедри динаміки та міцності машин та опору матеріалів (05.02.09);

доктор фізико-математичних наук, професор **Горошко Олег Олександрович**, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, провідний науковий співробітник кафедри теоретичної і прикладної механіки (05.02.09);

заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор **Ройзман Вілен Петрович**, Хмельницький державний університет, завідувач кафедрою прикладної механіки (05.02.09, 05.02.02)

Рекомендовано до опублікування  
вченою радою КДТУ (нині КНТУ),  
протокол №4 від 29 грудня 2003 року

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І ОСНОВНИХ УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	7
ВСТУП .....	8
ЧАСТИНА I. ІНЖЕНЕРНА ТЕОРІЯ ПАСИВНИХ АБП З ТВЕРДИМИ КВ .....	14
РОЗДІЛ 1. СТАН РОЗВИТКУ ПАСИВНОЇ АВТОБАЛАНСУВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ.....	15
1.1. Задача зрівноваження жорстких і гнучких роторів до і під час експлуатації.....	15
1.1.1. Особливості зрівноваження жорстких роторів .....	15
1.1.2. Особливості зрівноваження гнучких роторів.....	20
1.2. Досвід зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП...	23
1.2.1. Огляд основних конструкцій АБП .....	23
1.2.2. Огляд робіт з інженерного розрахунку пасивних АБП ....	32
1.2.3. Огляд областей застосування пасивних АБП .....	35
Висновки розділу 1 .....	43
РОЗДІЛ 2. ІНЖЕНЕРНА ТЕОРІЯ ЗРІВНОВАЖЕННЯ І ВІБРОЗАХИСТУ РОТОРІВ ПАСИВНИМИ АБП З ТВЕРДИМИ КВ .....	45
2.1. Умови зрівноваження ротора твердими КВ .....	45
2.2. Геометричні і масо-інерційні характеристики КВ, з нерухомою точкою на повздовжній осі ротора .....	49
2.3. Схеми зрівноваження і віброзахисту роторів. Класифікація АБП з твердими КВ.....	56
2.4. Інженерний критерій настання автобалансування .....	62
2.5. Інженерні умови зрівноваження роторів, які здійснюють плоский рух .....	67
2.5.1. Ротор на анізотропних опорах .....	67
2.5.2. Ротор, пружно закріплений в АТТ, яке також пружно закріплено і рухається поступально .....	69
2.5.3. Ротор під час різання (шліфування) .....	70

2.6. Інженерні умови зрівноваження ротора з нерухомою точкою . 73	
2.6.1. Випадок, коли вал утримує сферичний шарнір ..... 73	
2.6.2. Випадок, коли вал утримує циліндричний шарнір ..... 80	
2.7. Інженерні умови зрівноваження ротора при просторовому русі..... 81	
2.7.1. Диференціальні рівняння руху ..... 81	
2.7.2. Ротор несиметрично встановлений на ізотропні опори.... 86	
2.7.3. Ротор симетрично встановлений на ізотропні опори ..... 90	
2.8. Зрівноваження гнучких роторів ..... 92	
Висновки розділу 2 ..... 95	
<b>ЧАСТИНА ІІ. ДИНАМІКА ЗРІВНОВАЖЕННЯ І ВІБРОЗАХИСТУ</b>	
<b>РОТОРІВ ПАСИВНИМ АБП З ТВЕРДИМИ КВ ..... 96</b>	
<b>РОЗДІЛ 3. ЗАДАЧІ І МЕТОДИ ТЕОРЕТИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ</b>	
<b>ПРОЦЕСУ ЗРІВНОВАЖЕННЯ І ВІБРОЗАХИСТУ</b>	
<b>РОТОРІВ ПАСИВНИМИ АБП ..... 97</b>	
3.1. Огляд наукових праць і методів з теоретичного дослідження.. 97	
3.2. Загальні задачі теоретичного дослідження і методи їх розв'язання ..... 111	
3.3. Етапи, які можуть бути спільними для різних методів ..... 115	
3.4. Особливості реалізації методу, який ґрунтується на теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем ..... 119	
Висновки розділу 3 ..... 121	
<b>РОЗДІЛ 4. ЗАДАЧІ І МЕТОДИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО</b>	
<b>ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ЗРІВНОВАЖЕННЯ</b>	
<b>І ВІБРОЗАХИСТУ РОТОРІВ ПАСИВНИМИ АБП ..... 122</b>	
4.1. Огляд наукових праць з експериментального дослідження ... 122	
4.2. Задачі експериментального дослідження ..... 126	
4.3. Універсальний стенд для дослідження динаміки АБП ..... 128	
4.3.1. Опис стенду і вимоги до моделей АБП ..... 128	
4.3.2. Методика підготовки до проведення експериментів ..... 131	
4.3.3. Методика проведення експериментів ..... 138	
4.4. Стенд ротора з нерухомою точкою і валом, який утримується циліндричним шарніром..... 140	
Висновки розділу 4 ..... 143	
<b>РОЗДІЛ 5. ДИНАМІКА БАГАТОКУЛЬОВОГО</b>	
<b>(БАГАТОМАЯТНИКОВОГО) АБП..... 145</b>	

5.1. Фізична модель і диференціальні рівняння руху системи .....	145
5.2. Дослідження кількості і умов існування усталених рухів системи, у яких КВ обертаються синхронно з ротором .....	155
5.3. Дослідження стійкості основних рухів у випадку, коли ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора .....	162
5.3.1. Одержання характеристичного рівняння .....	162
5.3.2. Випадок нехтування силами опору і деякі граничні випадки .....	166
5.3.3. Граничні випадки при врахуванні сил опору .....	170
5.3.4. Визначення критичних швидкостей при врахуванні сил опору .....	174
5.4. Стійкість побічних рухів, у яких КВ обертаються синхронно з ротором і основного - у випадку великих дисбалансів .....	178
5.4.1. Одержання рівнянь першого наближення .....	178
5.4.2. Випадок, коли КВ відхилені у один бік .....	179
5.4.3. Випадок, коли КВ відхилені у різні боки .....	183
5.5. Дослідження квазіперіодичних побічних рухів. ....	186
5.5.1. Кількість і умови існування квазіперіодичних рухів .....	186
5.5.2. Стійкість квазіперіодичних рухів .....	192
5.5.3. Вигляд квазіперіодичних рухів .....	196
5.6. Експериментальне дослідження динаміки кульового АБП ....	201
5.6.1. Дослідження на універсальному стенді .....	201
5.6.2. Дослідження на стенді ротора з нерухомою точкою .....	210
Висновки розділу 5 .....	211
<b>РОЗДІЛ 6. ДИНАМІКА АБП, У ЯКИХ КВ ПОВЕРТАЮТЬСЯ НАВКОЛО ПОВЗДОВЖНЬОЇ І ПОПЕРЕЧНОЇ ОСЕЇ РОТОРА .....</b>	<b>215</b>
6.1. Принципи конструювання АБП, фізична модель і диференціальні рівняння руху системи .....	215
6.2. Дослідження кількості і умов існування усталених рухів системи, у яких КВ обертаються синхронно з ротором .....	222
6.2.1. Розв'язання рівнянь усталених рухів у параметричному вигляді .....	222
6.2.2. Рухи першої групи у випадку нехтування силами ваги і силами зовнішнього опору .....	226
6.2.3. Рухи першої групи у випадку нехтування силами зовнішнього опору .....	229
6.2.4. Рухи першої групи при врахуванні сил ваги і сил зовнішнього опору .....	234
6.3. Дослідження стійкості усталених рухів .....	241

6.3.1. Стійкість рухів першої групи.....	241
6.3.2. Стійкість рухів другої групи.....	246
6.4. Дослідження ефективності зрівноваження дисбалансу .....	248
6.5. Теорія квазіперіодичних рухів .....	251
6.5.1. Кількість і умови існування квазіперіодичних рухів .....	251
6.5.2. Стійкість квазіперіодичних рухів .....	262
6.6. Експериментальне дослідження динаміки ротора з АБП .....	267
Висновки розділу 6 .....	272
<b>РОЗДІЛ 7. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ З ДОСЛІДЖЕННЯ</b>	
<b>ДИНАМІКИ ІНШИХ ТИПІВ НЕКЛАСИЧНИХ АБП ...</b>	
7.1. Динаміка неklasичних АБП, не чутливих до сил ваги .....	274
7.1.1. Принципи конструювання неklasичних АБП, нечутливих до сил ваги.....	274
7.1.2. Основні результати теоретичних досліджень .....	281
7.1.3. Основні результати експериментальних досліджень.....	289
7.1.4. Основні результати аналітичної теорії квазіперіодичних рухів .....	300
7.2. Динаміка АБД.....	303
7.2.1. Принципи конструювання АБД.....	304
7.2.2. Основні результати теоретичних досліджень .....	307
7.2.3. Основні результати експериментальних досліджень.....	321
Висновки розділу 7 .....	331
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	334
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b> .....	336

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І ОСНОВНИХ УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

### Скорочення:

КВ – коригувальний вантаж;  
КМ – коригувальна маса;  
АБД – автобалансир-демпфер;  
АБП – автобалансувальний пристрій,  
автобалансир;  
АТТ – абсолютно тверде тіло.

### Наскрізнi позначення:

$M$  – маса ротора;  
 $\omega$  – кутова швидкість обертання ротора;  
 $A, B$  – головні осьові моменти інерції КВ відносно нерухомої точки на повздовжній осі ротора;  
 $m$  – маса КВ;  
 $l$  – відстань між точкою підвісу і центром мас КВ;  
 $S$  – балансувальна ємність КВ;  
 $V$  – об'єм КВ.

### Позначення першої частини:

$A, C$  – екваторіальний і полярний моменти інерції осесиметричного ротора;  
 $s$  – елементарний статичний дисбаланс ротора;  
 $\alpha, \beta$  – кути Резаля;  
 $\omega_i$  – критичні швидкості системи ротор-АБП, при переході яких порушується чи настає автобалансування.

### Позначення другої частини:

$e$  – ексцентриситет, з яким ротор насаджений на вал;  
 $\gamma$  – кут між віссю  $x$  і вектором дисбалансу ротора;  
 $c$  – коефіцієнт жорсткості опор ротора (вала);  
 $H_i$  – коефіцієнт моменту в'язкого тертя, який виникає при повороті КВ навколо  $i$ -ої осі обертання,  $i < i_{\max}$ ;  
 $H_{\max}$  – коефіцієнт зовнішнього в'язкого тертя в опорах ротора;  
 $g$  – прискорення вільного падіння;  
 $t$  – час;  
 $x, y$  – координати, що визначають положення повздовжньої осі ротора (осі вала) відносно координатних осей  $Oxuz$ ;  
 $\varphi, \psi, \theta$  – кути повороту КВ навколо власних осей обертання;  
 $\omega_0$  – резонансна частота (частота власних коливань ротора при відсутності обертання і нерухомих КВ);  
 $M_{\Sigma}$  – сумарна маса системи ротор – АБП;  
 $\rho_i$  – осьовий радіус інерції КВ відносно  $i$ -ої головної осі, яка проходить через нерухому точку на повздовжній осі ротора.

В окремих розділах і підрозділах використовуються властi умовні позначення, які переозначають вище наведені позначення.



## ВСТУП

Основним видом сил, що збуджують вібрації в роторних машинах, є відцентрові сили, що виникають від дисбалансу. Ефективним методом боротьби з такими вібраціями є зрівноважування роторів. В багатьох роторних машинах цей дисбаланс не можна усунути попереднім зрівноважуванням ротора, бо він виникає під час виконання ротором технологічних операцій, зокрема від завантаження ротора сировиною, що обробляється, або від заміни чи зносу робочого органу, тощо. Тому такі ротори треба зрівноважувати на ходу – під час експлуатації.

Для зрівноважування на ходу роторів, що швидко обертаються – шпинделів верстатів, абразивних кругів шліфувальних верстатів, автомобільних коліс, обертових частин двигунів внутрішнього згоряння, лопастей вертольотів, дисків ручних шліфувальних машин, екстракторів, центрифуг, сепараторів відцентрових машин, приводів CD і DVD дисків, тощо широко застосовуються АБП з твердими КВ, такі, як маятникові, кільцеві, кульові (так звані класичні) і т.д. У них КВ на закритичних швидкостях обертання ротора з часом самі приходять у положення, у якому зрівноважують ротор і далі рухаються з ним як одне ціле, поки не почне мінятися дисбаланс, швидкість обертання ротора, або не з'являється збурення різного походження. Термін пасивні означає, що ці пристрої не потребують підводу енергії та системи керування для переміщення КВ.

Пасивні АБП прості і дешеві у виготовленні, надійні в роботі. Але розширення області їх застосування стримується невірністю багатьох проблем у теорії і практиці зрівноваження роторів пасивними АБП.

До невіршених проблем першої групи відносяться найбільш загальні проблеми, зокрема наступні.

1. Не створена єдина теорія зрівноваження і віброзахисту ротора АБП з твердими КВ, зокрема не з'ясовано, за яких умов тверді КВ можуть зрівноважувати ротор у певній площині корекції, і чи є інші схеми автобалансування і віброзахисту роторів, відмінні від відомої - класичної.

2. Майже не досліджені особливості зрівноваження роторів в залежності від їх масо-інерційних характеристик, гнучкості, способу закріплення, місця встановлення АБП, тощо. Так, основні дослідження були проведені для двохкульових АБП, а застосовані у дослідженнях наближені методи не дозволили виявити низку істотних властивостей системи. Майже відсутня теорія зрівноваження пасивними АБП гнучких роторів.

3. Немає простих і ефективних методів визначення умов настання автобалансування, які б давали швидкі і достовірні результати для будь-якої роторної системи і будь-яких АБП. Майже всі існуючі методи занадто громіздкі і застосовуються тільки для конкретного типу АБП і ротора. Тому одержані результати носять частинний характер.

Невирішені проблеми другої групи зумовлені недостатньою глибиною теоретичних і експериментальних досліджень процесу зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП та наявністю низки явищ, які ще не знайшли належного теоретичного обґрунтування. Для формулювання цих проблем зазначимо, що у системи ротор - АБП існують істотно відмінні усталені рухи, у яких КВ припиняють рух щодо ротора. У так званих основних рухах ротор зрівноважений, якщо балансувальної ємності АБП для цього вистачає, або найбільше зрівноважений - якщо не вистачає, а в побічних – розбалансований. Традиційно при теоретичному дослідженні динаміки системи ротор-АБП досліджується стійкість основних і побічних усталених рухів, і критерієм настання автобалансування (працездатності АБП) є стійкість на робочому інтервалі кутових швидкостей обертання ротора принаймні одного основного руху і нестійкість всіх побічних. Аналіз основних робіт з дослідження динаміки системи ротор-АБП показує, що до невирішених проблем другої групи відносяться, зокрема, наступні.

1. Теоретично вдалося дослідити динаміку двохкульового (двохмаятникового) АБП, причому наближено і тільки для випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора і малі сили опору в опорах. Не розглянутими залишилися інші практично важливі випадки, зокрема: ротора, що швидко обертається; скінченних сил опору; великих сил внутрішнього опору, тощо. Не створена аналітична теорія зрівноваження ротора відомими АБП (кульовими, маятниковими) з багатьма КВ.

2. При теоретичному дослідженні динаміки ротора з АБП виділяються тільки ті усталені рухи, у яких КВ припиняють рух щодо ротора. При цьому не з'ясоване питання, а чи є інші усталені рухи, і якщо є, то як вони впливають на процес зрівноваження і віброзахисту ротора і на умови настання автобалансування.

3. Чисельні експерименти показують, що автобалансування починає відбуватися на швидкостях, дещо більших за критичні швидкості обертання ротора, а на сам процес впливає дисбаланс, місце встановлення АБП у роторі і інші фактори, але це аналітично не досліджено.

Монографія спрямована на надолуження вказаної неповноти досліджень і узагальнює та доповнює теоретико-експериментальні дослідження, проведені автором особисто, чи у співавторстві, за результатами яких опубліковано 30 наукових статей у фахових виданнях, 11 патентів України, 7 тез доповідей науково-технічних конференцій, 2 депонованих рукописи.

Робота складається із вступу, двох частин, які містять сім глав з наскрізною нумерацією, списку літературних джерел.

Перша частина має два розділи, розв'язує проблеми першої групи і присвячена створенню інженерної (наближеної) теорії пасивних АБП.

У першому розділі формулюються задачі зрівноваження жорстких і гнучких роторів до і під час експлуатації, наводиться огляд історії пасивної автобалансувальної техніки, визначається область застосування пасивних АБП, наводяться приклади їх найбільш вдалого використання, робиться огляд літератури з конструювання АБП, ставиться задача з створення інженерної (наближеної) теорії зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП з твердими КВ.

У другому розділі створюється інженерна теорія зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП з твердими КВ. Вона має три частини. Перша - теорія твердих КВ - містить: умови, при виконанні яких АТТ може зрівноважити ротор у певній площині корекції, зокрема положення цієї площини, кінематику руху АТТ, масо-інерційні характеристики; приклади АТТ, які задовольняють знайденим умовам, їх геометричні і масо-інерційні характеристики, зокрема форму, габаритні розміри, масу, балансувальну ємність, осьові моменти інерції тощо. Друга частина - теорія зрівноваження і віброзахисту роторів твердими КВ - містить: схеми зрівноваження і віброзахисту роторів твердими КВ; відповідні конструкції АБП; класифікації згаданих схем і АБП. Третя частина - інженерні умови настання автобалансування - містить інженерний критерій настання автобалансування та одержані з його допомогою умови настання автобалансування при зрівноваженні пасивними АБП: жорстких роторів при різному пружному закріпленні; гнучких роторів.

Інженерний (наближений) метод визначення умов настання автобалансування ґрунтується на інженерному критерії, який узагальнює властивості автобалансувальних систем і застосовний для будь-якого пасивного АБП, зокрема з рідкою КМ, і для будь-якої роторної системи, зокрема для жорстких і гнучких роторів. Цей метод може бути реалізований як теоретично, так і експериментально.

Перша частина монографії є завершеним, окремим дослідженням, результати якого дозволяють конструювати і розраховувати пасивні АБП для будь-яких роторних систем з інженерним рівнем строгості. Не дивлячись на наближеність, результати, одержані із застосуванням розробленого інженерного підходу, покривають і розширюють умови автобалансування різних роторів, одержані в інших теоретичних роботах із застосуванням інших наближених методів.

Друга частина (останні п'ять розділів) присвячена теоретичному і експериментальному дослідженню зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП як процесу, тобто як явища, яке відбувається у часі у певній послідовності. Вона спрямована на узагальнення досвіду теоретико-експериментальних досліджень, більш повне дослідження процесів зрівноваження і віброзахисту роторів класичними і новими -

некласичними АБП у рамках найбільш актуальної і поширеної моделі - ротора на ізотропних в'язко-пружних опорах, який рухається плоскопаралельно і статично зрівноважується АБП. Така модель знайшла найбільше застосування, бо придатна для коротких роторів, якими є шліфувальні круги, CD/DVD диски, ротори багатьох екстракторів, центрифуг, сепараторів, дискові пили, автомобільні і авіакоlesa тощо. До того ж у рамках цієї моделі найбільш досліджена динаміка класичних АБП - кільцевих, кульових, маятникових тощо. Тому є можливість порівняння одержаних результатів з вже відомими і оцінки глибини проведених у монографії досліджень.

У третьому розділі узагальнюється досвід теоретичного дослідження процесу зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП з твердими КВ. Робиться огляд основних робіт з теоретичного дослідження, методи і підходи, що в них застосовуються. Наводиться загальна послідовність досліджень. Оцінюються різні методи її реалізації. Порівнюються результати, одержані раніше із застосуванням різних методів. У випадку ротора на ізотропних опорах розвивається метод, який ґрунтується на теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем. Доводиться, що метод дозволяє вирішити всі основні задачі з теоретичного дослідження процесів зрівноваження і віброзахисту ротора на ізотропних опорах пасивними АБП з твердими КВ і дає результати, які неможливо одержати із застосуванням інженерного критерію автобалансування, та інших наближених методів.

У четвертому розділі узагальнюється досвід експериментального дослідження процесів зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП. Робиться огляд основних робіт цього напрямку, методів і підходів, які в них застосовуються. Створюється експериментальний метод, який ґрунтується на використанні стробоскопічного освітлення для спостереження за рухом КВ відносно ротора, і (лазерного) променя, спрямованого по повздовжній осі ротора – для попереднього балансування ротора, спостереження за рухом ротора, оцінки швидкості і якості зрівноваження ротора, визначення власних частот коливаний ротора, тощо. Описуються стенди для проведення досліджень, методика проведення на них експериментів, формулюються задачі досліджень.

У наступних розділах розвинутий теоретичний і створений експериментальний методи досліджень застосовуються для дослідження динаміки різних типів АБП. При цьому: будується математична модель ротора на ізотропних в'язко-пружних опорах, який рухається плоскопаралельно і статично зрівноважується певним типом АБП; досліджується кількість, умови існування і стійкість усталених рухів, у яких КВ обертаються синхронно з ротором як при дисбалансах, які можуть зрівноважити АБП, так і при при дисбалансах, які АБП зрівноважити не

може; досліджується кількість, умови існування і стійкість квазіперіодичних рухів системи ротор-АБП; на універсальному стенді експериментально перевіряються одержані теоретичні результати і досліджується динаміка системи ротор-АБП у режимах розгону і вібругу ротора, та при дії збурень різного походження.

У п'ятому розділі досліджується динаміка багатокульових (багато-маятникових) АБП.

У шостому розділі досліджується динаміка нового, некласичного АБП, у якому КВ обертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора.

У сьомому розділі викладаються основні результати досліджень динаміки нових, некласичних АБП: із зв'язаними КВ - нечутливих до сил ваги; АБД - пристроїв, призначених для одночасного зрівноваження роторів і демпфірування їх вібрацій. Ці дослідження були проведені за участю та під науковим керівництвом автора відповідно Ю.А.Невдахою та В.С.Сотніковим.

При дослідженні динаміки різних типів АБП уперше аналітично досліджена стійкість основних і побічних рухів у низці важливих з точки зору практики випадках: ротора, що швидко обертається; скінченних сил опору; скінченного відношення маси КВ до маси системи, та інших. Виявлено існування і створена теорія квазіперіодичних рухів ротора з АБП. Відповідним чином уточнені умови настання автобалансування. Теоретичні результати перевірені і доповнені низкою експериментів.

Слід відзначити, що автором досліджувалася динаміка і інших типів АБП, зокрема - маятникового АБП із зв'язаними КВ, та АБП з КВ, насадженими на поперечні осі ротора. Проте розглянутих у другій частині монографії типів АБП вистачає для теоретичного виявлення і експериментальної перевірки майже усіх явищ і ефектів, якими супроводжується процес автобалансування і віброзахисту ротора.

У кінці кожного розділу і монографії наводяться висновки, які містять найбільш загальні отримані результати.

В монографії виконані огляди наукових робіт з: історії балансувальної техніки; області застосування пасивних АБП; розрахунку основних параметрів АБП; теоретичного і експериментального дослідження динаміки системи ротор-АБП.

Докладна характеристика використаних джерел наведена у відповідних оглядах. Нижче дається найбільш загальна інформація.

Найбільш повну інформацію про зрівноваження гнучких і жорстких роторів до початку експлуатації містить двохтомна монографія [1,2], створена групою авторів М.Е.Левитом, В.П.Ройзманом, В.А.Щепетильниковим та іншими.

Найбільш повні огляди конструкцій різних типів АБП містять роботи [3-9] авторів Е.Л.Тhearle, Б.М.Грушина, А.А.Гусарова, Дж. Ларрі, В.І.Сусаніна, Г.Б.Філімоніхіна, Л.Н.Шаталова.

Історію виникнення основних типів пасивних АБП відображають патенти і роботи [10-15] - авторів А.Fesca, E.Rose, G.M.Herrick, E.W.Louden, E.L.Thearle, K.Clark. Приклади і області застосування пасивних АБП відображають патенти [16-49] і інші роботи, наведені у списку робіт конкретних вчених.

Дослідженню динаміки пасивних АБП, поліпшенню їх конструкції, та розрахунку присв'ячені роботи [50-201] авторів Ю.В.Агафонова, А.І.Артюніна, І.І.Блехмана, І.В.Борка, Б.Г.Гольдштейна, А.Н.Горбенка, Б.И.Горбунова, О.О.Горошка, О.О.Гусарова, В.Г.Гусєва, Ф.М. Детинка, С.Л.Катанухіної, С.Н.Кладієва, В.І.Кравченка, В.С.Майорова, О.В.Малигіна, А.І.Муйжніска, Ю.А.Невдахи, В.П.Нестеренка, О.О.Нікітіна, Л.А.Пашкової, А.Ф.Проخورова, О.П.Радченка, Ю.С.Рейбаха, А.И.Ривкіна, В.П.Ройзмана, А.П.Соколова, В.С.Сотнікова, Г.Б.Філімоніхіна, Р.Г.Чоловського, J.Adolfsson, J.D.Alexander, Y.Araki, R.B.Bhat, P.Bövik, J.W.Cade, C.P.Chao, J.Chung, S.Emanuelsson, C.Högfors, C.L.Huang, C.H.Hwang, I.Inove, J.Inoue, I.Jang, M.S.Jeon, Y.Jinouchi, J.R.Kang, T.Kawaguchi, Y.Kawakami, W.D.Kim, H.O.Kwon, J.K.Lee, H.S.Lee, T.Miwa, S.Miyara, W.K. Van Moorhem, Y.Ohtsuka, J.S.Park, C.Rajalingham, S.Rakheja, D.S.Ro, S.Shimizu, C.K.Sung, K.Suzuki, C.Tan, та інших вчених.

В теоретичних дослідженнях використані відомості з теорії роторних та гіроскопічних систем, зокрема з теорії коливань і стійкості таких систем, які викладені в роботах [1,2,202-245] авторів А.Є.Бабенка, М.І.Бобиря, О.О.Боронка, М.В.Василенка, О.А.Глонь, О.О.Горошка, В.А.Грובה, А.В.Збруцького, А.П.Зінковського, А.Ю.Ішлінського, М.Е.Левита, А.С.Кельзона, М.Я.Кушуля, М.А.Кільчевського, А.Н.Крилова, В.П.Легези, В.В.Матвєєва, А.Найфе, М.А.Павловського, Я.Г.Пановка, В.Е.Петренка, В.А.Пятецького, В.П.Ройзмана, А.Я.Савченка, А.Тондла, В.В.Хільчевського, Ю.П.Циманського, В.И.Яковлева, та інших вчених.

Монографія може бути корисна фахівцям з автоматичного балансування і віброзахисту роторів, інженерам, аспірантам. Її результати можуть бути використані при проектуванні, випробовуванні і впровадженні будь-яких типів АБП, призначених для зрівноваження будь-яких швидкісних роторних систем.

Автор висловлює подяку рецензентам і науковому консультанту - д.т.н., проф. Бобирю Н.І. (директор механіко-машинобудівного інституту Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут") за увагу, проявлену до роботи, цінні наукові поради і зауваження.

---

## Частина I. ІНЖЕНЕРНА ТЕОРІЯ ПАСИВНИХ АБП З ТВЕРДИМИ КВ

---

Формулюються задачі зрівноваження жорстких і гнучких роторів до і під час експлуатації, наводиться огляд історії пасивної автобалансувальної техніки, визначається область застосування пасивних АБП, і приклади їх найбільш вдалого використання, робиться огляд літератури з конструювання АБП.

Створюється інженерна теорія зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП з твердими КВ, яка має три частини.

Перша частина - теорія твердих КВ - містить: умови, при виконанні яких АТТ може зрівноважити ротор у певній площині корекції, зокрема положення цієї площини, кінематику руху АТТ, масо-інерційні характеристики; приклади АТТ, які задовольняють знайденим умовам, їх геометричні і масо-інерційні характеристики, зокрема форму, габаритні розміри, масу, балансувальну ємність, осьові моменти інерції тощо.

Друга частина - теорія зрівноваження і віброзахисту роторів твердими КВ - містить: схеми зрівноваження і віброзахисту роторів твердими КВ; відповідні конструкції АБП; класифікації згаданих схем і АБП.

Третя частина - інженерні умови настання автобалансування - містить інженерний критерій настання автобалансування та одержані з його допомогою умови настання автобалансування при зрівноваженні пасивними АБП: жорстких роторів при різному пружному закріпленні; гнучких роторів.

Інженерний критерій настання автобалансування узагальнює властивості автобалансувальних систем і має таке формулювання: для усунення пасивним АБП з твердими КВ відхилення деякої точки поздовжньої осі ротора від осі обертання, чи для зменшення цього відхилення рідинним АБП необхідно і достатньо, щоб ця точка під дією дисбалансу, у ній прикладеного, у середньому за один оберт ротора відхилялася протилежно вектору дисбалансу.

Інженерний критерій застосовний для будь-якого пасивного АБП, зокрема з рідкою КМ, і для будь-яких роторів, зокрема жорстких і гнучких. Не дивлячись на наближеність результатів, які дає критерій, вони збігаються з відомими умовами автобалансування, одержаними раніше для класичних АБП (кільцевих, кульових, маятникових, рідинних) із застосуванням інших наближених методів, доповнюють і узагальнюють їх, зокрема розповсюджують на всі типи пасивних АБП.

Перша частина монографії є завершеним, окремим дослідженням, результати якого дозволяють конструювати і розраховувати пасивні АБП для будь-яких роторних систем з інженерним рівнем строгості.

## РОЗДІЛ 1. СТАН РОЗВИТКУ ПАСИВНОЇ АВТОБАЛАНСУВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

### 1.1. Задача зрівноваження жорстких і гнучких роторів до і під час експлуатації

#### 1.1.1. Особливості зрівноваження жорстких роторів

Твердим вважається ротор, що працює на швидкостях, менших його першої критичної швидкості [1]. При цьому мається на увазі критична швидкість обертання для самого ротора, а не його податливих опор. З наближенням швидкості обертання ротора до його першої критичної швидкості з'являється істотне скривлення повздовжньої осі ротора, тобто стають істотними властивості ротора, як деформовного тіла. У цьому підпункті розглядаються тільки жорсткі ротори.

Відцентрові сили  $\vec{F}_i$ , що виникають при обертанні ротора через наявність незрівноважених мас  $m_i$ , приводяться до головного вектора  $\vec{R}$  і головного моменту  $\vec{M}_O$ :

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i, \quad \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i), \quad (1.1)$$

де  $O$  - центр приведення сил. Оскільки відцентрові сили пропорційні квадратові кутової швидкості обертання ротора -  $\omega$ , то і головний вектор та момент сил інерції пропорційні квадратові кутової швидкості.

Дисбаланс ротора не залежить від кутової швидкості обертання ротора і визначається головним вектором  $\vec{P}_{cm}$  і головним моментом  $\vec{M}_O$  дисбалансу:

$$\vec{P}_{cm} = \frac{\vec{R}}{\omega^2} = \frac{\sum \vec{F}_i}{\omega^2}, \quad \vec{M}_O = \frac{\vec{M}_O}{\omega^2} = \frac{\sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)}{\omega^2}. \quad (1.2)$$

$\vec{P}_{cm}$  - це статичний дисбаланс ротора, викликаний тим, що центр мас ротора знаходиться не на осі обертання. Величина

$$e = P_{cm} / M, \quad (1.3)$$

де  $M$  - маса ротора, називається ексцентриситетом і дорівнює відстані від центра мас ротора до осі обертання.

$\vec{M}_O$  - це моментний дисбаланс ротора, викликаний тим, що головна центральна вісь ротора нахилена під кутом  $\alpha$  до осі обертання.

У техніці статичний дисбаланс вимірюється в  $[г \cdot мм]$ , а моментний -  $[г \cdot мм^2]$ .

На рис. 1.1 показані різні випадки незрівноваженості ротора.



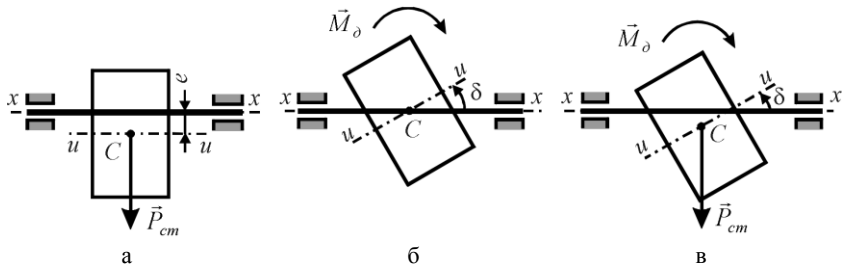


Рис. 1.1. Види незрівноваженості ротора:  
 а - статична; б - моментна; в - динамічна

При статичній незрівноваженості ротора його головна центральна вісь  $u-u$  паралельна осі обертання  $x-x$  (рис. 1.1, а). При цьому центр мас ротора знаходиться на відстані  $e$  від цієї осі. При цьому відцентрові сили зводяться до рівнодіючої, прикладеної до центра мас ротора.

При моментній незрівноваженості ротора його головна центральна вісь  $u-u$  перетинається з віссю обертання  $x-x$  у центрі мас ротора (рис. 1.1, б). При цьому відцентрові сили зводяться до однієї пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту.

При динамічній незрівноваженості ротора його головна центральна вісь  $u-u$  перехрещується з віссю обертання  $x-x$ , або перетинається, але не в центрі мас (рис. 1.1, в). При такому дисбалансі відцентрові сили зводяться до головного вектора і моменту.

Балансування твердого ротора – це процес суміщення головної центральної осі ротора з його віссю обертання.

Статичним балансуванням називається процес усунення статичної незрівноваженості ротора. Пристрій, що визначає тільки головний вектор дисбалансів, називається верстатом для статичного балансування. Як правило, у таких верстатах використовується сила ваги. Наприклад, ротор встановлюється в горизонтальній опорі з малим опором обертання (рис. 1.2, а). Під дією сили ваги  $m\vec{g}$  центр мас ротора – точка  $З$  займає щонайнижче положення під віссю обертання. КМ додають вгорі або видаляють унизу.

Деякі ротори досить зрівноважувати статично. Наприклад, так зрівноважують шліфувальний круг, насаджений на шпindel шліфувального верстата (рис. 1.2, б). Під дією сили ваги  $m\vec{g}$ , що діє на шліфувальний круг, шпindel верстата повертається так, що центр мас круга – точка  $С$  приходить у щонайнижче положення. Круг зрівноважують двома коригувальними масами, що переміщуються по колу з центром на осі обертання, устанавлюючи їх над дисбалансом і розсуваючи на необхідний кут.

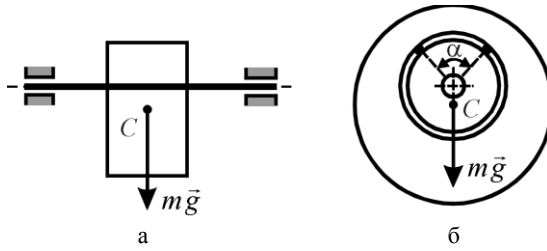


Рис. 1.2. Статичне зрівноваження ротора

Динамічне зрівноваження ротора виконується на спеціальних балансувальних верстатах, призначених для визначення динамічної незрівноваженості ротора і наступного її усунення коректуванням мас. Теоретично процес динамічного зрівноваження ротора ґрунтується на наступному. З розділу статички курсу теоретичної механіки відомо, що довільна система сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, зводиться до двох перехресних сил. При балансуванні твердих роторів відцентрові сили, що діють на ротор, зводяться до двох перехресних сил  $\vec{R}_I, \vec{R}_{II}$ , що лежать відповідно в поперечних перерізах I-I і II-II ротора, названих площинами корекції. Їм відповідають два дисбаланси, що лежать у цих площинах (рис 1.3, а):

$$\vec{P}_I = \vec{R}_I / \omega^2, \quad \vec{P}_{II} = \vec{R}_{II} / \omega^2. \quad (1.4)$$

Формули, що визначають дисбаланси ротора в двох площинах корекції –  $\vec{P}_I, \vec{P}_{II}$  за головним вектором  $\vec{P}_{cm}$  і моментом  $\vec{M}_0$  дисбалансів задають формули розділу 6 ДСТ 22061-76.

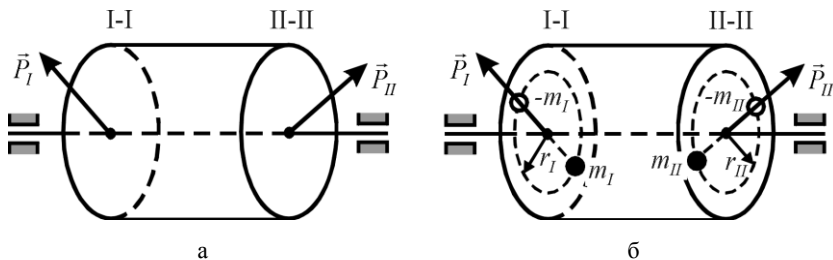


Рис. 1.3. Динамічне зрівноваження ротора:  
а – дисбаланс ротора в двох площинах корекції;  
б – розташування коригувальних мас, що компенсують дисбаланс

Дисбаланс твердого ротора усувається двома точковими КМ  $m_I, m_{II}$  (рис. 1.3, б):

$$m_I = P_I / r_I, \quad m_{II} = P_{II} / r_{II}, \quad (1.5)$$

де  $r_I, r_{II}$  - відстані від відповідної маси до осі обертання. При цьому додатні маси  $m_I, m_{II}$  встановлюються у відповідних площинах корекції протилежно відповідному векторові дисбалансу, а від'ємні маси  $-m_I, -m_{II}$  (знімаються з ротора) - у напрямку відповідного вектора дисбалансу.

Якщо центр зведення сил - точку  $O$  взяти в поперечному перерізі I-I ротора, і на відстані  $L$  провести другий поперечний переріз II-II, то

$$\vec{P}_I = \vec{P}_{cm} + \vec{e}P_\delta, \quad \vec{P}_{II} = -\vec{e}P_\delta, \quad P_\delta = M_\delta / L, \quad \vec{e} = \frac{\vec{L} \times \vec{M}_\delta}{LM_\delta}, \quad (1.6)$$

де:  $P_\delta$  - модуль двох однакових і протилежно спрямованих дисбалансів, що на плечі  $L$  створюють моментний дисбаланс  $\vec{M}_\delta$ ;  $\vec{L}$  - вектор, спрямований по осі обертання від перерізу I-I до перерізу II-II;  $\vec{e}$  - одиничний вектор, перпендикулярний векторам  $\vec{L}, \vec{M}_\delta$ , причому такий, що трійка векторів  $\vec{L}, \vec{M}_\delta, \vec{e}$  - права.

Для визначення й усунення динамічної незрівноваженості роторів застосовуються балансувальні верстати різної конструкції. У балансувального верстата наступні основні компоненти:

- 1) механічна частина, що складається із станини верстата й опор для установки ротора, що надає роторові певні ступені вільності;
- 2) приводний пристрій, що задає роторові певну частоту обертання під час балансувального процесу;
- 3) вимірjuвальний пристрій, що дозволяє визначити величину і кут дисбалансу ротора в площинах корекції;
- 4) виконавчий орган, що перерозподіляє маси в площинах корекції.

В основу класифікації верстатів покладені розходження в конструкціях їхніх основних компонентів. Крім цього, у залежності від маси  $m$  ротора, що зрівноважується, верстати поділяються на три серії:

- 1) легка (Л) -  $m \leq 10$  кг;
- 2) середня (С) -  $10 < m < 1000$  кг;
- 3) важка (В) -  $m > 1000$  кг.

У залежності від ступеня автоматизованості процесу балансування верстати поділяються на три групи:

- 1) група 0 - оператор визначає і компенсує дисбаланс;
- 2) група 1 - дисбаланс визначається автоматично й автоматично компенсується після зупинки ротора;
- 3) група 2 - дисбаланс визначається і компенсується автоматично на ходу без зупинки ротора.

Кожен зібраний твердий ротор балансується до початку експлуатації в двох площинах корекції. Якщо ротор складається з декількох частин, послідовно встановлюваних на вал, то часто балануються як окремі частини, так і весь ротор у зборі.

До 60-х років балансування роторів до експлуатації на заводах здійснювалася на низькочастотних верстатах (де не виявляються пружні властивості ротора) за класичною схемою: у двох площинах корекції, розташованих у крайніх (найближчих до опор) дисках. В даний час по статистиці ВАТ “Турбомоторный завод” (Росія) тільки 5÷10% роторів, що випускаються, балануються в декількох площинах корекції на високих швидкостях (на яких виявляються пружні властивості ротора), а інші, як і раніше, зрівноважуються за класичною схемою. Особливості балансування гнучких роторів викладені в [2], і деякі відомості наведені у наступному підпункті.

Якщо дисбаланс ротора і зв'язаних з ним частин змінюється в процесі експлуатації або необхідно підвищити точність зрівноваження ротора, то ротор зрівноважується і під час роботи. Для цього використовуються АБП [3-9]. Вони розміщуються усередині ротора, або насаджуються на ротор, його вал тощо, і зрівноважують ротор шляхом переміщення КВ відносно ротора. Для повного зрівноваження твердого ротора АБП достатньо, щоб він зрівноважував ротор у двох площинах корекції. Проте у багатьох випадках достатньо зрівноважувати ротор статично.

Розрізняють АБП двох типів:

- 1) активні – із примусовим переміщенням КВ [5-7];
- 2) пасивні – з вільним переміщенням КВ [3,4,6-9].

Активні АБП працюють на будь-якій швидкості обертання ротора. Їх недоліком є складна конструкція, що включає механізм примусового переміщення КВ, датчики коливань ротора, логіку, що керує переміщеннями КВ, механізм подачі енергії в ротор. Також вони мають невелику балансувальну ємність у порівнянні з об'ємом, який використовують.

Пасивні АБП працюють на закритичних швидкостях обертання ротора. Вони мають просту конструкцію, тому що КВ в них переміщуються самі. Їхня робота ґрунтується на явищі самоцентрування, відповідно до якого на закритичних швидкостях обертання пружно закріпленого твердого ротора його головна центральна вісь інерції прямує до осі обертання, причому тим більше, чим більша швидкість обертання ротора.

В залежності від типу КМ пасивні АБП діляться на:

- 1) АБП з твердими КВ;
- 2) рідинні АБП, у яких КМ утворена рідиною;
- 3) комбіновані АБП, у яких КМ утворена як рідиною, так і твердими КВ.

### 1.1.2. Особливості зрівноваження гнучких роторів

Розглянемо особливості виникнення коливань гнучких роторів [2].

Гнучким вважається ротор, що працює на швидкостях, що перевищують його першу критичну швидкість. При цьому мається на увазі критична швидкість обертання для самого ротора. По її досягненні з'являється істотне скривлення повздовжньої осі ротора, тобто він починає поводитися як деформовне тіло.

Навіть за відсутності дисбаланса гнучкий ротор є постійним джерелом вібрацій і реакцій в опорах. Пов'язано це з гнучкістю ротора. Так, до першої критичної швидкості обертання двохопорного симетричного ротора його повздовжня вісь згинається півхвилею синусоїди, причому, чим вища швидкість обертання, тим більший прогин (рис. 1.4). При досягненні першої критичної швидкості сили пружності ротора не можуть утримати подовжню лінію у вигляді однієї півхвилі, тому відбувається перехід на іншу форму вигнутої осі – дві півхвилі, потім – три і т.д. Викривлення повздовжньої осі ідеально зрівноваженого ротора у вигляді  $n$  півхвиль помітно збільшується тільки при підході знизу до критичної швидкості  $\omega_n$ . По її проходженні повздовжня вісь ротора практично цілком розпрямляється. З подальшим зростанням швидкості обертання ротора повільно збільшується деформація ротора у вигляді  $(n + 1)$  півхвиль, поки швидкість не наблизиться до  $(n + 1)$  критичної і т.д. На віддалі від критичних швидкостей повздовжня вісь практично не викривлена. Тому гнучкі ротори експлуатують на швидкостях, розташованих на деякому віддаленні від їхніх критичних швидкостей.

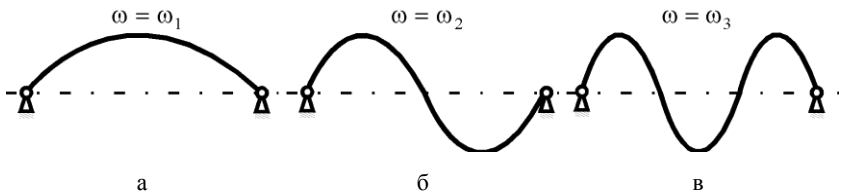


Рис. 1.4. Вигнута вісь гнучкого зрівноваженого ротора:  
а – до першої; б – між першою і другою;  
в – між другою і третьою критичними швидкостями

У реальному роторі дисбаланс розподілений уздовж його осі за певним законом. Форми вигнутих осей ротора при резонансі і дисбаланси ротора виявляють наступні властивості [2]:

- 1) будь-які дві форми вигнутих осей ротора ортогональні, а сукупність усіх форм вигнутих осей утворює повну систему ортогональних функцій;

- 2) будь-який дисбаланс ротора, як безперервний, так і дискретний, може бути розкладений у ряд за складовими, пропорційними формам вигнутих осей ротора;
- 3) наявність  $n$ -ої складової дисбалансу значно збільшує прогини ротора у вигляді  $n$  півхвиль тільки на  $n$ -ому резонансі, а на прогини ротора на інших резонансах не впливає;
- 4) на  $n$ -му резонансі повздожня вісь ротора викривляється у відповідності з  $n$ -ою формою дисбалансу.

Ці властивості мають наступні важливі наслідки:

- 1) якщо ротор спокійно проходить  $n$ -ту критичну швидкість, то немає  $n$ -ої складової дисбалансу;
- 2) спокійне проходження перших  $n$  критичних швидкостей забезпечує спокійну роботу ротора до швидкостей, дещо менших за  $(n+1)$  критичну;
- 3) для того, щоб ротор спокійно працював до  $(n+1)$  критичної швидкості, достатньо, щоб його дисбаланс не мав перших  $n$  складових.

Зрівноважування ротора шляхом послідовного усунення складових дисбалансів називається теорією (у деякій літературі методом) зрівноважування ротора розподіленими КМ. На практиці застосування таких мас неможливо. Тому замість них застосовують дискретні маси, що встановлюють у скінченому числі площин корекції. Ці маси обирають так, щоб їх розкладання у вигляді ряду за власними формами коливань ротора не мали найнижчі складові у розкладанні.

Розглянемо особливості зрівноваження гнучких роторів до початку експлуатації. Теоретично ротор зручно зрівноважувати розподіленими КМ, з дисбалансами, розподіленими у вигляді форм вигнутих осей ротора. При цьому теоретично можливо послідовне зрівноважування ротора з будь-якою необхідною точністю. На практиці ротор зрівноважується зосередженими КМ, що розташовуються у фіксованій кількості площин корекції. Розкладання зосередженого дисбалансу на складові в загальному випадку має усі форми вигнутих осей ротора. Тому коли дискретними КМ усувається  $n$ -а форма дисбалансу, то змінюються всі інші. У зв'язку з цим немає послідовного поліпшення зрівноваженості ротора.

На викладених відомостях з теорії коливань гнучких роторів засновані наступні способи їх зрівноважування.

**Спосіб 1** – усунення реакцій в опорах ротора на робочій швидкості обертання шляхом зрівноважування ротора на цій швидкості в двох доступних площинах корекції. Критерієм зрівноваженості є відсутність реакцій в опорах ротора на робочій швидкості обертання. Очевидно, що в цьому випадку ротор зрівноважується як тверде тіло. На фіксованій

швидкості обертання ротора в усталених режимах ротор на ізотропних опорах дійсно поводить як жорстке тіло. Проте кожній швидкості відповідає власна форма тіла і відповідне розподілення дисбалансу. Форма тіла істотно змінюється при переході критичних швидкостей. Тому ротор неспокійно проходить нижні критичні швидкості і погано працює між ними. Спосіб застосовується для роторів, що працюють на фіксованій швидкості обертання. Як правило, ротор балансується у власних опорах – на місці експлуатації, або на стенді, максимально наближеному до реальних умов експлуатації ротора.

**Спосіб 2** – зрівноважування ротора в трьох площинах корекції. Це балансування ротора на низьких швидкостях з усуненням статичного дисбалансу ротора коректуванням мас по середині, а моментного - по краях. Спосіб ґрунтується на тому, що статичний дисбаланс ротора підсилює першу форму вигнутої осі ротора і фізично утворений масами, розташованими ближче до центра ротора. Моментний дисбаланс підсилює другу форму вигнутої осі і фізично утворений масами, розташованими ближче до країв ротора. За суттю це оптимізація низькочастотного балансування ротора, заснована на теорії гнучких роторів.

**Спосіб 3** – зрівноважування ротора в декількох площинах корекції. Ротор зрівноважується дискретними масами в декількох площинах корекції, причому маси підбираються так, щоб у розкладанні залишкового дисбалансу ротора була відсутня найбільша кількість щонайнижчих складових. Для підбору мас необхідно встановлювати пробні маси в площинах корекції, обертати ротор з резонансними швидкостями, аналізувати форми коливань осі ротора. Теоретично метод найбільш розроблений. Однак на практиці його реалізація досить трудомістка.

**Спосіб 4** – максимальне зменшення опорних реакцій і коливань контрольних точок машини на всьому робочому діапазоні кутових швидкостей обертання ротора шляхом підбору КМ у трьох і більш доступних площинах корекції. Спосіб реалізується, коли ротор у власних опорах або на стенді, що максимально повторює реальні умови експлуатації ротора. При цьому виділяються характерні для машини точки, вібрації яких повинні бути зменшені. Площини корекції таких роторів введені в їхню конструкцію і тому залишаються доступними після установки ротора в машину. Реалізація методу вимагає застосування ЕОМ, тому що необхідні розрахунки для визначення величин і міст встановлення КМ.

При однаковому розташуванні площин корекції цей метод приводить практично до такого ж результату, що і попередній. Однак є принципова різниця. У попередньому методі потрібно знаходити форми вигнутих осей ротора, резонансні швидкості і т.д. У цьому методі за визначеним алгоритмом мінімізуються вібрації машини і ротора в контрольних точках. Тому немає потреби вивчати форми коливань ротора.

Недолік способу зв'язаний з тим, що у ротора залишається дисбаланс, розподілений по його повздожній осі. Хоча викликані ним коливання машини і реакції в опорах максимально компенсовані, повздожня вісь ротора залишається деформованою. Ротор не може працювати на швидкостях, що перевищують швидкості, на яких він був зрівноважений.

Як і тверді ротори, гнучкі ротори можна зрівноважувати під час експлуатації активними і пасивними АБП. Нижче буде викладена інженерна теорія зрівноваження гнучкого ротора пасивними АБП з твердими КВ.

## 1.2. Досвід зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП

### 1.2.1. Огляд основних конструкцій АБП

За наявними матеріалами перший АБП - кільцевий (рис. 1.5) з'явився більше ста тридцяти років тому, а саме 26 березня 1872 року, коли німецький інженер Альберт Феска (Albert Fesca) із Берліну одержав патент США № 125036 на кільцевий АБП, призначений для зрівноваження вертикально розташованого барабана машини з осушення цукру [10]. Патент був перевиданий як patent US №7,455 Reissued, 2 Jan. 1877 (в деяких оглядах історії балансувальної техніки це перевидання помилково розглядається як первинний патент, а дата 02.01.1877 р., як початок історії пасивної автобалансувальної техніки).

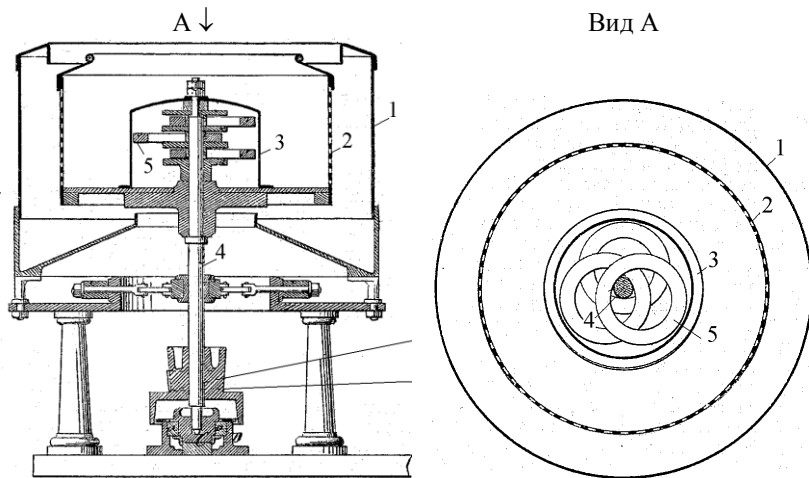


Рис. 1.5. Кільцевий АБП А.Феска (1872 р.):

1 – машина з осушення цукру; 2- барабан; 3 – АБП; 4 – вал; 5 – кільце.



А.Феска запропонував усередині барабана на його вал вільно насаджувати два і більше кільця, більшого за вал внутрішнього діаметра. Робота АБП основана на явищі самоцентрування, при якому на зарезонансних швидкостях обертання ротора головна центральна вісь ротора прямує до осі обертання, причому тим більше, чим вища кутова швидкість обертання ротора. На рис. 1.6, а зображений випадок статичного дисбалансу при відсутності обертання ( $\omega=0$ ,  $\omega$  - кутова швидкість обертання ротора). Повздовжня вісь ротора  $w$  співпадає з віссю обертання  $z$ , а головна центральна вісь ротора  $\zeta$  знаходиться на відстані  $e$  від повздовжньої осі ротора.

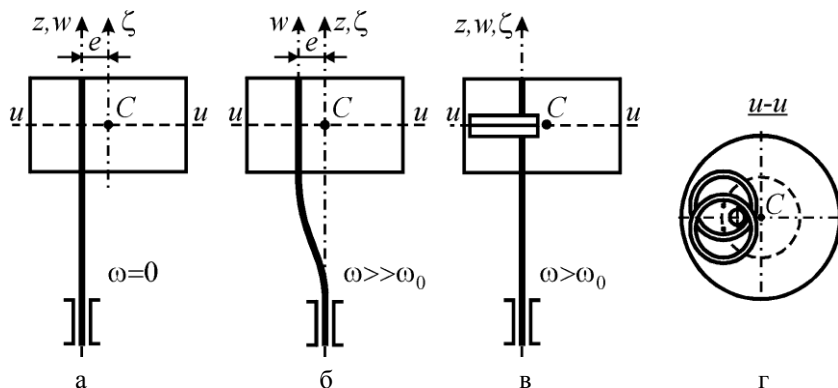


Рис. 1.6. Явище самоцентрування і робота кільцевого АБП

На закритичних швидкостях ( $\omega > \omega_0$ ,  $\omega_0$  – найвища критична швидкість ротора на пружному невагомому валі) головна центральна вісь ротора  $\zeta$  починає прямувати до осі обертання  $z$ , причому тим більше, чим більша швидкість обертання ротора. При цьому вал ротора разом з повздовжньою віссю ротора  $w$  переміщується відносно осі обертання  $z$  у легкий бік ротора - рис. 1.6, б. Якщо на вал насадити два кільця, то вони дещо відхиляться у цей бік і будуть зрівноважувати ротор у площині корекції  $u-u$ , як це показано на рис. 1.6, в, г. При цьому співпадуть головна центральна вісь ротора, його повздовжня вісь і вісь обертання.

Два і більше таких АБП, розташованих на різних рівнях, або один АБП з чотирма і більшою кількістю кілець будуть зрівноважувати ротор у декількох площинах корекції, а значить будуть усувати повний дисбаланс. У винаході А.Феска заявив, що ротор (барабан) можуть зрівноважувати два і більше будь-яких КВ, центр мас яких рухається по колах, розташованих у поперечних площинах ротора, причому з центром на повздовжній осі ротора. Цим він вирішив задачу повного зрівноваження ротора і вказав найбільш загальну вимогу щодо руху КВ

відносно ротора. Також у своєму способі автобалансування барабана А.Феска запропонував використовувати для розміщення АБП внутрішній простір барабана поблизу осі обертання, який в екстракторах, сепараторах, центрифугах тощо технологічно не використовується.

Під час пуску, розбігу і вибігу барабана кільця у АБП Феска вносять додатковий дисбаланс в систему, що погіршує ці процеси при встановленні АБП у барабан. До того ж АБП використовує внутрішній простір барабана, що для деяких типів машин не бажано. З метою подолання цих недоліків німецький інженер Еміль Розе (Emil Rothe) запропонував нову конструкцію кільцевого АБП, зображену на рис. 1.7, і 01.12.1885 одержав на неї патент США №331450 [11].

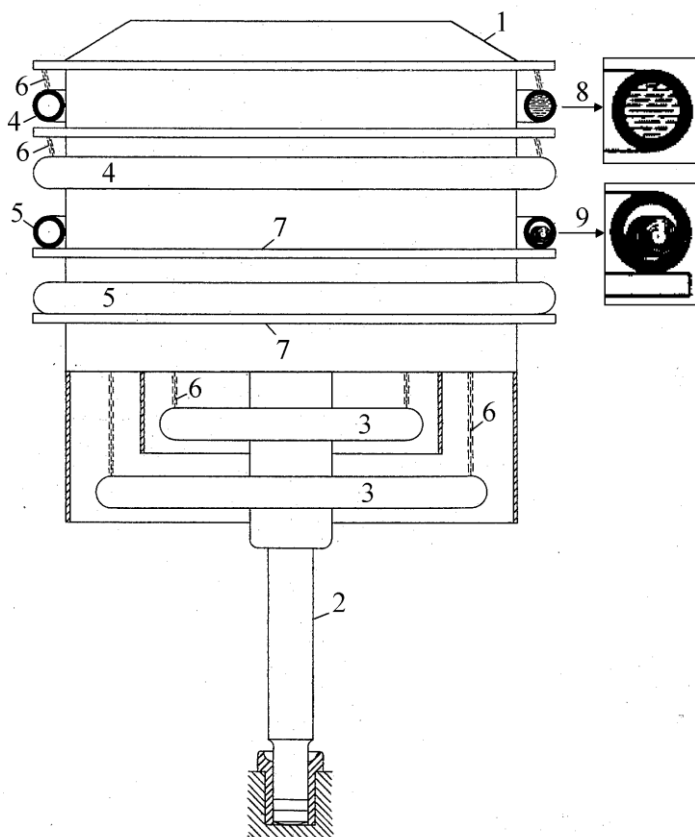


Рис. 1.7. Кільцевий АБП Е. Rothe (1885 р.)

На рис. 1.7 зображена схема барабана з АБП. Барабан 1, насаджений на вал 2, зрівноважується кільцями 3, 4, 5, які відрізняються розміщенням щодо барабана і виконанням. Кільця 3 охоплюють вал 2 і підвішені на ланцюги 6. Це звільняє внутрішній простір барабана і забезпечує його спокійний розбіг і вибіг, бо на невеликих швидкостях кільця під дією сил ваги прямують до нейтрального положення, зображеного на схемі і не вносять додаткового дисбалансу. Кільця 4, на відміну від кілець 3, охоплюють барабан зовні. Кільця 5 також охоплюють зовні барабан, проте розташовані на горизонтальних площадках 7, як і в АБП А.Феска. Тому кільця 5 не покращують розбіг і вибіг ротора.

Пристрій Е.Розе працює подібно АБП А.Феска, тільки кільця не займають внутрішній простір ротора, і обертаються на валі чи барабані тільки за наявності дисбалансу і на великих швидкостях обертання барабана – коли дія сил ваги долається.

Додатково Е.Розе запропонував виконувати кільця порожнистими і заповнювати їх рідиною 8, чи кулями 9. Тому цей пристрій можна розглядати як прототип рідинних і кульових АБП, які з'явилися пізніше.

У кільцевих АБП кільця розташовані в різних площинах, що вносить додатковий динамічний дисбаланс у систему. З метою усунення цього недоліку 13 квітня 1889 року американський інженер Жорж Херік (George M.Herrick) запропонував кульовий автобалансир для зрівноваження горизонтальних роторів, зокрема шпинделів верстатів (рис. 1.8), на який одержав патент США №414642 від 05.11.1889 р. [12].

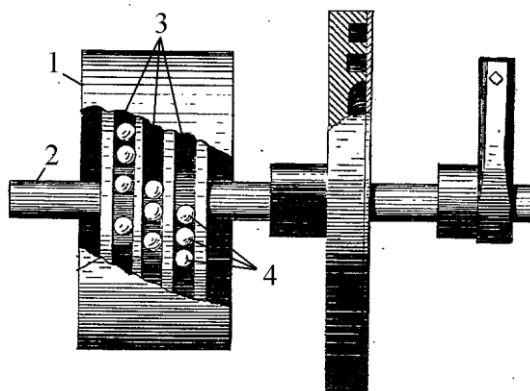


Рис. 1.8. Кульовий АБП George M.Herrick (1889 р.)

У пристрої (рис. 1.8) усередині порожнистого ротора 1, насадженого на вал 2, знаходяться кільцеві бігові доріжки 3 з центром на осі вала, усередині яких розташовані сталеві кулі 4. Кулі на одній доріжці

зрівноважують статичний дисбаланс у площині, що перпендикулярна валу і проходить через серединний переріз доріжки. Тому АБП з двома і більше доріжками зрівноважує ротор у двох і більше площинах корекції і здатний зрівноважити повний дисбаланс ротора.

Аналогічний пристрій, тільки з використанням “від’ємних мас”, запропонував 17.08.1918 р. американський інженер Едгар Луїден (Edgar W.Louden) і 26.08.1919 року одержав на нього патент США №1314005 [13]. Він запропонував заповнювати доріжки важкою рідиною, а кулі виконувати легкими у вигляді поплавків. При такому виконанні кулі котяться не по зовнішній, а по внутрішній поверхні тороподібної доріжки. За наявними матеріалами це перший приклад використання “від’ємних мас”. Слід відзначити, що в АБП Edgar W.Louden проглядають елементи оптимального проектування, а саме з пояснювальних до винаходів рисунків (не з опису конструкції АБП) випливає, що в оптимальному випадку КВ на біговій доріжці повинні займати половину її периметра.

У 1932 році американський інженер Е.Сирл (E.Thearle) запропонував кульовий АБП (рис. 1.9) для зрівноваження роторів з вертикальною віссю обертання [14].

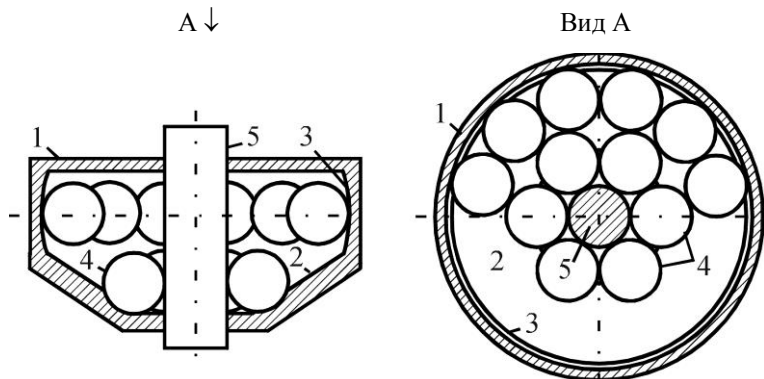


Рис. 1.9. Кульовий АБП Е.Thearle (1932 р.)

У його пристрої усередині корпуса АБП 1 виконана зрізана конічна обійма 2, що зверху переходить у бігову доріжку 3. Усередині обійми розміщені шість сталевих куль 4 (у варіанті Е.Сирла – 7 сталевих куль). При нерухомому роторі вони знаходяться у нижній частині конічної обійми, щільно притиснуті одна до одної. При виході на бігову доріжку кулі займають до половини її периметра. Корпус АБП насаджується на вал ротора 5. Пристрій працює так. На докритичних швидкостях кулі під дією сил ваги знаходяться в нижній частині обійми, щільно притиснуті

одна до одної, розташовані симетрично щодо вала ротора і не вносять додатковий дисбаланс у систему. На закритичних швидкостях кулі під дією відцентрових сил піднімаються у верхню частину обойми, виходять на бігову доріжку і переміщуючись по ній, з часом приходять у те положення, у якому зрівноважують ротор. При вибігу ротора відбувається зворотне.

Слід відзначити, що неповний огляд історії створення АБП для зрівноваження вертикально розташованих роторів, переважно побутових пральних машин, був уперше зроблений, за наявними матеріалами, E.Thearle [3-5]. Часто цей огляд сприймається як нарис історії розвитку пасивних АБП. Але в ньому нерозглянуті АБП, що виникли набагато раніше, за деякі пристрої, описані у огляді. Це згадані АБП E.Rothe (1885 р.), George M.Herrick (1889 р.), Edgar W.Louden (1918 р.), та інші, серед яких є пристрої для зрівноваження роторів з вертикальною віссю обертання.

В огляді E.Thearle описаний маятниковий АБП, запропонований у 1940 році Kendall Clark [15], який призначений для зрівноваження вертикальної центрифуги пральної машини. Конструкція АБП також вирішує задачу усунення динамічного дисбалансу, внесеного кільцевим АБП. Цей пристрій складається (рис. 1.10) з чотирьох маятників 1, розташованих в одній площині і насаджених на чотири осі 2, що установлені симетрично щодо вала ротора 3. Повороти маятників обмежують обмежувачі 4. АБП працює наступним чином. При обертанні ротора з закритичними швидкостями вал відхиляється у легкий бік ротора. Туди ж відхиляються маятники, чим зменшують дисбаланс системи.

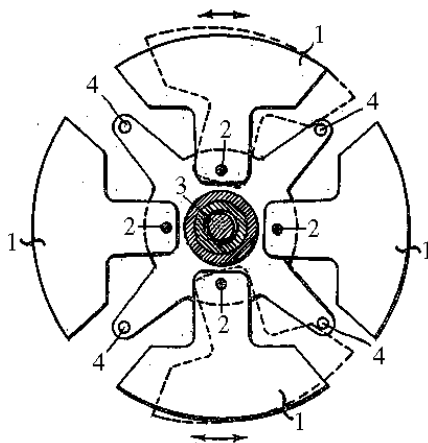


Рис. 1.10. Маятниковий АБП Kendall Clark (1940 р.), вид зверху

Спокійний розбіг і вибіг ротора забезпечують обмежувачі. Так, при пуску ротора всі маятники повертаються в протилежний щодо напрямку обертання ротора бік і виходять на обмежувачі. У такому положенні вони займають симетричне положення щодо ротора і не вносять дисбаланс в систему. Аналогічне відбувається і при гальмуванні. Необхідно відзначити, що в силу конструктивних особливостей такі маятникові АБП не можуть цілком зрівноважити статичний дисбаланс ротора і тому можна вважати, що їх конструкція менш вдала, ніж конструкція кульового АБП.

За наявними матеріалами група авторів В.І.Кравченко, Г.Г.Стельмах, В.А.Ромашенко, І.І.Ситник 27.07.1981 р. уперше запропонувала конструкцію кульового АБП з двохранним розташуванням куль, призначеного для зрівноваження ротора дробівки. На цей винахід було одержане авторське свідоцтво СРСР №1011250 від 15.04.83 р. [73]. Пізніше такі АБП були названі багаторядними. Їх конструкція і динаміка були досліджені у кандидатській дисертації В.І.Кравченка [70]. Слід відзначити, що ідея багаторядного розташування куль, циліндричних і конічних роликів, тощо знайшла після цього широке використання у світі [18,31,38,39,47].

Як відзначалося вище, у кільцевих, кульових і маятникових АБП на закритичних швидкостях обертання ротора КВ приходять у те положення, у якому зрівноважують ротор. Однак, при зміні швидкості, вони це положення покидають, тому що починають відставати, або випереджати ротор. Для того, щоб КВ відслідковували зміну швидкості обертання ротора, в роботах Г.Б.Філімоніхіна [139-142] уперше запропоновано на їхні переміщення накладати в'язі, що дозволяють КВ попарно повертатися відносно ротора на рівні кути в протилежні боки. Динаміка таких АБП досліджена у дисертаційній роботі Філімоніхіна Г.Б. [139].

У ході подальших удосконалень згадані вище пристрої були значно поліпшені [16-49,71,72,118,119,151,152], однак їх конструкція при цьому принципово не змінилася. Основною ознакою, яка розрізняє різні типи АБП, які працюють за схемою А.Феска, є тип КВ, що в ньому застосовується. На рис. 1.11 наведені різні типи КВ, що використовуються в АБП. На рис. 1.12 наведені принципові схеми, що пояснюють роботу різних типів АБП.

Незважаючи на різні типи КВ, принципи роботи таких пристроїв однакові. Так, в названих пристроях під час зрівноваження різних дисбалансів центри мас КВ рухаються у поперечній площині ротора по колах з центром на повздовжній осі ротора. АБП працюють на закритичних швидкостях обертання ротора – швидкостях, після яких відбувається самоцентрування ротора. На цих швидкостях КВ приходять у те положення, в якому зрівноважують ротор (рис. 1.12), і

далі обертаються з ним як одне ціле, поки не почне змінюватися дисбаланс, або кутова швидкість обертання ротора, чи на ротор не почнуть діяти збурні сили різної природи.

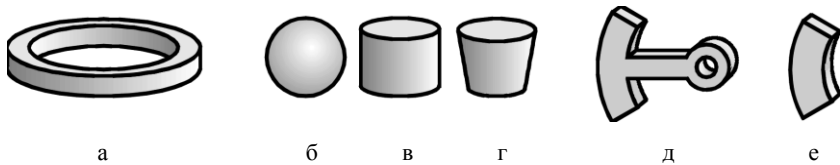


Рис. 1.11. Класичні КВ: а - кільце; б - куля; в - циліндричний ролик; г - конічний ролик; д - маятник; е - сегмент.

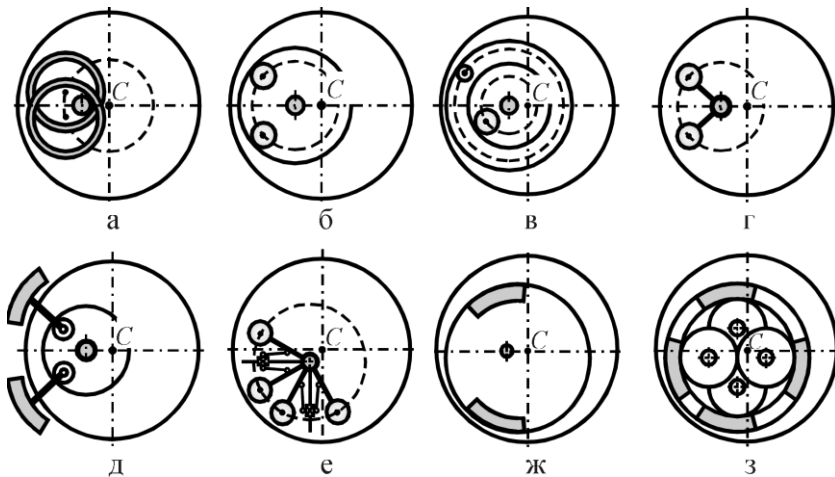


Рис. 1.12. АБП з КВ, які в усталених рухах повертаються навколо осі вала ротора, або класичні АБП:

а - кільцевий; б - однорядний кульовий (роликовий); в - багаторядний кульовий (роликовий); г - маятниковий з маятниками на вала ротора; д - маятниковий з маятниками на катках; е - маятниковий з в'язями; ж - сегментний; з - сегментний з в'язями.

Огляд літератури з конструкцій пасивних АБП показує, що описані типи пасивних АБП виникли першими і найбільш розповсюджені. Тому в [9,139] запропоновано називати їх класичними АБП.

Перевагами класичних АБП є дешевизна, простота конструкції, надійність у роботі. Поряд з перевагами, класичні АБП мають низку недоліків. Першим недоліком класичних АБП є дія КВ із значними силами на вал (маятники чи кільця), чи бігову доріжку (кулі), навіть при

відсутності дисбалансу. Викликано це тим, що центри мас КВ в цих пристроях завжди знаходяться на певній відстані від осі вала ротора. Це значно знижує чутливість КВ до зміни дисбалансу, і збільшує залишковий дисбаланс ротора. Так, у кульовому АБП кільцева бігова доріжка деформується, а точка контакту кулі і доріжки перетворюється у пляму контакту. Тому кулі у пристрої знаходяться у стані застою і незадовільно реагують на поточну зміну дисбалансу. Це швидко посилюється із зростанням кутової швидкості обертання ротора, бо відцентрові сили пропорційні квадрату кутової швидкості обертання ротора. Другим недоліком класичних АБП є неспокійний розгін і вибіг ротора, бо КВ в цих режимах не займають нейтральне положення відносно ротора. Крім того, кульові АБП потребують великої точності виготовлення і встановлення, та загартовування куль і бігової доріжки, кільцеві і маятникові пристрої вносять додатковий динамічний дисбаланс в систему, сегментні – мають невелику точність зрівноваження ротора, бо на сегменти діють значні сили сухого тертя.

Необхідно відзначити, що крім АБП з твердими КВ, з'явилися так звані рідинні і комбіновані.

У рідинних АБП часткове балансування ротора відбувається за рахунок рідини, що заповнює порожнини ротора [3,6-8,123-127,191,192, 197-201]. У силу конструктивних особливостей такі АБП тільки зменшують початковий дисбаланс і не можуть його повністю усунути. Крім того, пристрої мають більші габарити, оскільки питома вага рідини (як правило води) значно менша питомої ваги матеріалу, з якого зроблені тверді КВ (як правило сталі). Тому область використання таких пристроїв надзвичайно вузька. Слід відзначити, що найкращий на сьогоднішній день рідинний АБП – багатокамерний, за наявними матеріалами уперше запропонований групою авторів В.П.Нестеренком, А.П.Соколовим, В.М.Замятіним, Д.В.Лачигініним [124], і досліджений В.П.Нестеренком [103]. Авторами уперше показано, що багатокамерний рідинний АБП має більшу точність зрівноваження ротора, ніж однокамерний. Їх ідеї отримали визнання у світі, і зараз багатокамерні рідинні АБП починають повертати раніше втрачені області застосування [197].

Комбіновані АБП використовують комбінацію трьох середовищ: тверді КВ; рідина; повітря, причому рідина утворює значну частину балансувальної ємності АБП. Вони здатні повністю зрівноважити статичний дисбаланс ротора у своїй площині корекції, але при дисбалансі, що не більший балансувальної ємності твердих КВ. Теоретико-експериментальні роботи, проведені В.П.Ройзманом, І.В.Борко, О.В.Малигініним, О.О.Нікітініним, Р.Г.Чоловським [189-196] встановили певні переваги комбінованих АБП над АБП з твердими КВ, зокрема працездатність на більшому діапазоні кутових швидкостей



обертання ротора. Але слід відзначити, що комбінація рідини з класичними КВ, наприклад кульками, не усуває частину недоліків класичних АБП, зокрема тиск КВ на ротор із значними силами, високі вимоги до точності виготовлення і встановлення АБП і т.п. Крім того, рідина має невелику питому вагу і тому габарити комбінованих АБП більші за габарити АБП з твердими КВ.

### **1.2.2. Огляд робіт з інженерного розрахунку пасивних АБП**

Задачі дослідження АБП можна умовно поділити на два типи.

Задачі першого типу, інженерні, полягають у конструюванні АБП, а саме: описують конструкції і принцип дії різних АБП; встановлюють їх технічні характеристики – габаритні розміри, масу, балансувальну ємність, тощо; оцінюють точність зрівноваження ротора АБП в залежності від різних факторів, зокрема – неточності виготовлення, чи встановлення АБП, наявності сил сухого тертя, і інших факторів.

Задачі другого типу, з дослідження динаміки, вивчають автобалансування і віброзахист роторів АБП як процес, тобто як явище, яке відбувається в певній залежності від часу. При їх розв'язанні, як правило, складаються, а потім досліджуються диференціальні рівняння руху системи ротор – АБП.

Відповідно до такого поділу задач деякі наукові роботи мають інженерну (конструкторську) спрямованість, деякі – спрямовані на дослідження динаміки АБП, а деякі мають комплексний характер, бо розв'язують задачі двох типів.

Друге, що розрізняє наукові роботи – це їх спрямованість. Деякі роботи мають загальне спрямування, бо досліджують загальні характеристики АБП, без врахування особливостей їх застосування. Деякі, навпаки – вузькоспрямовані, бо досліджують АБП спеціального призначення. У цьому підрозділі робиться огляд літератури загальноінженерної спрямованості. Огляд літератури з дослідження АБП спеціального призначення проводиться у наступному підрозділі, де розглядається область застосування пасивних АБП. Огляд літератури з дослідження динаміки АБП проводиться у другій частині монографії - у розділі 3.

Безумовно на розв'язання інженерних задач спрямовані патенти і авторські свідоцтва, зокрема ті, що розглянуті. Розв'язанню загальноінженерних задач присвячені і інші наукові роботи – статті, монографії, дисертації тощо. Розглянемо деякі з них.

Слід відзначити, що елементарний опис основних (і окремих) типів АБП, деякі особливості їх конструкцій і роботи наведені у багатьох наукових роботах. Нижче згадуються найбільш істотні роботи, причому ті, які були доступні автору.

У циклах статей E.L.Thearle [3,4] розглянутий принцип дії і наведені деякі кількісні співвідношення, що пояснюють роботу кільцевих, маятникових, кульових і рідинних АБП. За наявними матеріалами, на свій час, це був перший огляд історії і конструкцій пасивних АБП, розроблених для зрівноваження переважно вертикально розташованих барабанів пральних машин. E.L.Thearle застосував плоску модель ротора і АБП. Як відомо, у її рамках у ротора існує єдина критична швидкість, при перевищенні якої ротор починає обертатися легкою стороною назовні і починає проявлятися явище самоцентрування ротора. За результатами цих робіт всі пристрої працездатні на швидкостях, більших за критичну. Слід відзначити, що кульовий АБП досліджувався для випадку двох куль. У системи ротор-АБП, для випадку, коли ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора, встановлено існування чотирьох усталених рухів – одного основного, у якому ротор зрівноважений і трьох побічних, у яких ротор розбалансований. Дослідження автобалансування, як процесу, звелося до оцінки стійкості різних усталених рухів. Критерієм працездатності двохкульового АБП було: стійкість основного руху і одночасна нестійкість усіх побічних рухів.

Підходи і результати робіт E.L.Thearle були перекладені на російську мову і склали основу наступних досліджень, викладених у: Дж.Ларри [6], книгах А.А.Гусарова, В.І.Сусаніна, Л.Н.Шаталова, Б.Н.Грушина [7], А.А.Гусарова [8] тощо.

Більш розроблені елементи теорії кульового АБП, що не враховують динаміки, можна знайти в роботах J.D.Alexander [51], J.W.Cade [53] і інших вчених.

Найбільш розвинута інженерна теорія, переважно для двохкульових АБП, створена О.І.Муйжніском [88,89]. В роботах, у рамках плоскої моделі ротора і АБП, досліджена балансувальна ємність двохкульового АБП, чутливість куль до дисбалансу в залежності від: дисбалансу ротора; швидкості обертання ротора; жорсткості опор; сухого тертя, яке діє на кулі під час кочення; радіуса куль.

У книзі Ю.С.Рейбаха [184], із застосуванням близького, але дещо іншого підходу, ніж у статтях О.І.Муйжнієка, досліджені всі фактори, що впливають на процес балансування, враховані у роботах О.І.Муйжнієка. Додатково оцінені впливи: на точність зрівноваження ротора ексцентриситету бігової доріжки куль; на процес автобалансування сил зовнішнього в'язкого опору, діючих на ротор.

Багаторядний кульовий АБП досліджувався у дисертаційній роботі В.І.Кравченка [70]. Ця робота узагальнює результати робіт [71-85], та інших, повний перелік яких наведений в авторефераті [70], виконаних автором особисто, та у співавторстві з Ромащенко В.А., Гусаровим А.А. та іншими вченими. У роботі, з точки зору теорії конструювання АБП,

одержані наближені і точні формули для визначення балансувальної ємності багаторядних кульових АБП. Розроблена методика розрахунків параметрів таких АБП за величиною дисбалансу і зовнішнім радіусом бігової доріжки куль. Досліджений вплив сухого тертя на точність балансування ротора.

Однорядні кульові і рідинний АБП досліджені у докторській дисертації В.П.Нестеренка [103]. Ця робота узагальнює результати робіт [104-127], та інших, повний перелік яких наведений в авторефераті [103], виконаних автором особисто, та у співавторстві з А.П.Соколовим, С.Л.Катанухіної та іншими вченими. З точки зору теорії конструювання кульових АБП у роботі одержані точні формули для визначення балансувальної ємності однорядних кульових АБП (з однаковими кулями). Досліджений вплив сухого тертя в контакті між кулею і біговою доріжкою на точність зрівноваження ротора. Досліджений вплив неточності форми бігової доріжки (відхилення від кола) і неточності її встановлення (з ексцентриситетом відносно осі вала) на точність зрівноваження ротора. Розроблена конструкція багатокамерних рідинних АБП. Встановлено, що використання декількох коаксіальних камер з рідиною істотно підвищує якість зрівноваження ротора. З точки зору динаміки, у роботі досліджувалася стійкість тільки основних рухів системи ротор-АБП, причому без врахування сил в'язкого опору, що діють на ротор і для двох куль на одній доріжці. Проте розглянуті різні моделі ротора: плоска, на анізотропних опорах; ротора, пружно закріпленого на тілі, що також пружно закріплене; ротора з нерухомою точкою; ротора, закріпленого на симетричних пружних опорах, у випадку, коли він здійснює просторовий рух. Одержані діапазони швидкостей, на яких буде відбуватися автобалансування.

Конструкція, принцип дії і (переважно) динаміка маятникових і сегментних АБП з в'язями, у рамках плоских моделей, вивчена в роботах Г.Б. Філімоніхіна [139-142] (повний перелік робіт в авторефераті [139]).

Своєрідним довідником з інженерної теорії зрівноваження ротора класичними АБП, що працюють за схемою А.Феска, є книга А.Гусарова [8]. У ній описані конструкції і принципи дії кільцевих, маятникових, кульових, роликівих, рідинних АБП, зокрема запропонованими автором, вченими колишнього СРСР та російськими вченими. Приведені співвідношення, що пояснюють роботу пристроїв, формули для обчислення їх балансувальної ємності, алгоритми розрахунку АБП за заданими параметрами. Книга відображає інженерні дослідження (зокрема ті, що перелічені вище), проведені для плоских моделей ротора на ізотропних опорах і АБП. Тому результати В.П.Нестеренка в ній майже відсутні. Також не відображені останні дослідження динаміки таких пристроїв (1988-2002 р.р.).

### 1.2.3. Огляд областей застосування пасивних АБП

Перед тим, як розглядати області застосування пасивних АБП, слід відзначити, що найбільше застосування у техніці знайшов кульовий АБП. Пов'язано це з тим, що кульовий АБП забезпечує найбільшу точність зрівноваження ротора, а з іншого боку, його корпус може охоплювати ротор зовні, що звільняє внутрішній простір ротора. Менш використовуються роликові і маятникові АБП. При рівних габаритних розмірах вони дозволяють одержати більшу балансувальну ємність у порівнянні з кульовими АБП. Але точність зрівноваження ними ротора менша, оскільки на ролики і маятники діють більші сили сухого тертя, ніж на кулі. Практично не використовуються кільцеві АБП, оскільки у порівнянні з габаритними розмірами мають невелику балансувальну ємність. Також практично не використовуються сегментні АБП, оскільки на сегменти діють значні сили сухого тертя, що зменшує точність зрівноваження ними ротора.

Описані типи АБП з твердими КВ були спочатку запропоновані для зрівноваження екстракторів машин з осушення цукру [10], центрифуг, екстракторів, сепараторів з вертикально розташованим валом [11], швидкісних роторів, зокрема шпинделів верстатів [12], шпинделів деревообробних верстатів, дискових пил, шліфувальних кругів, обертових частин двигунів, гіроскопів, пропелерів літаків [13], та інших. У подальшому такі пристрої знайшли застосування для зрівноваження барабанів побутових пральних машин з вертикальним [14,15,17-20,198-200] і горизонтальним [21-25,197] розташуванням барабана, автомобільних і авіаколіс [26-34], обертових частин двигунів внутрішнього згорання, зокрема колінчастих валів [30-37], лопастей гелікоптера [33,37], шпинделів шліфувальних і полірувальних верстатів [16,32,34,37,182-186], шліфувальних дисків ручних шліфувальних машин [38,39,103,120-122,174-181], змінних дисків, та CD і DVD дисків у відповідних пристроях, які використовуються у цифровій техніці [39-47,187,188], сепараторів [48], вентиляторів [49], та в інших роторних машинах. Пропонувалося застосовувати пристрої для зрівноваження космічних апаратів і станцій, та боєголовок і снарядів, положення яких стабілізується у просторі обертанням [33,34].

Нижче розглядаються деякі патенти, які ілюструють спосіб використання АБП при зрівноваженні різних об'єктів.

На рис. 1.13 зображено використання кульового АБП для зрівноваження обертових частин шліфувального (полірувального) верстату, запропоноване E.L.Thearle у патенті US 1,967,163 [16]. На шпиндель 1 верстата насаджений шліфувальний (полірувальний) круг 2. Їх і інші обертові частини у зборі зрівноважують два кульових АБП 3,

насаджених на шпindel з протилежних сторін. Це забезпечує повне (динамічне) зрівноваження обертових частин. За подібною схемою можна використовувати всі АБП, запропоновані для таких верстатів у згаданих вище джерелах [12,13,32,34,37,182-186].

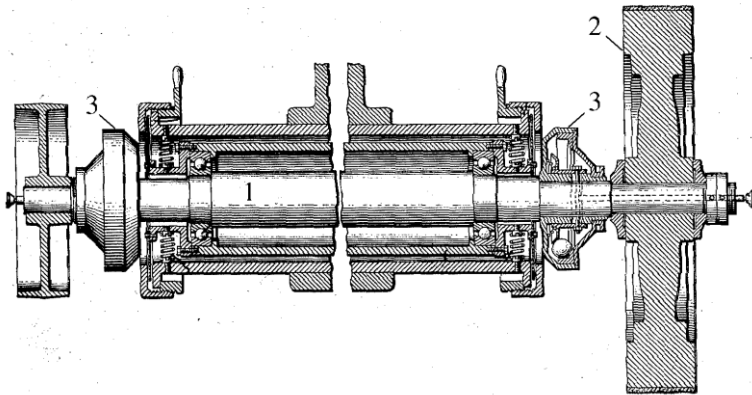


Рис. 1.13. Patent US 1,967,163 - зрівноваження обертових частин шліфувального (полірувального) верстату:  
1 – шпindel, 2 – шліфувальний (полірувальний) круг, 3 – кульовий АБП

На рис. 1.14 зображене використання кульового АБП для зрівноваження обертових частин двигуна внутрішнього згорання, запропонованого у патенті US 4,674,356 [36].

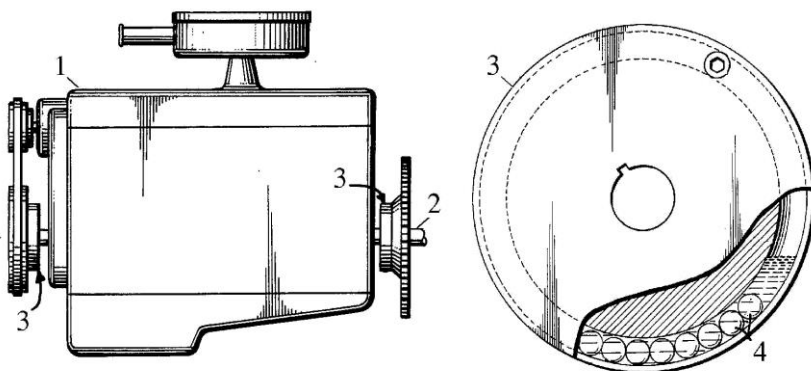


Рис. 1.14. Patent US 4,674,356 - зрівноваження обертових частин двигуна внутрішнього згорання:  
1 – двигун, 2 – вал, 3 – кульовий АБП, 4 – кулі

На рис. 1.14 зображений двигун 1, на вал 2 якого з протилежних сторін насаджені два кульові АБП 3. Це забезпечує повне (динамічне) зрівноваження обертових частин двигуна. За подібною схемою використовуються всі АБП, запропоновані в згаданих вище патентах [30-35,37].

Деякі патенти розв'язують комплексну задачу з віброзахисту автомобілів від вібрацій. Так на рис. 1.15 зображене використання кульового АБП для зрівноваження колінчастого вала двигуна внутрішнього згорання, і обертових частин автомобільних коліс, запропонованого у патенті US 5,460,017 [31]. З рисунка видно, що вал коліс і колінвал зрівноважуються двома АБП у двох площинах корекції, що забезпечує їх повне зрівноваження.

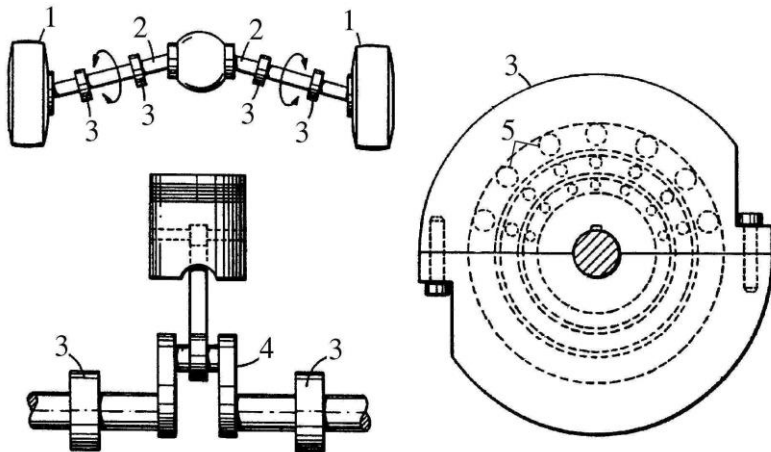


Рис. 1.15. Patent US 5,460,017 - зрівноваження обертових частин автомобільних коліс, і колінчастого вала двигуна внутрішнього згорання:

1 – колесо, 2 – вал колеса, 3 – кульовий АБП, 4 – колінвал, 5 – кулі

Слід відзначити, що у більшості патентів, в яких запропоновано зрівноважувати автомобільні і авіаколеса, АБП встановлюються безпосередньо на колесо [26-30,32-34]. На рис. 1.16 зображене використання кульового АБП, запропонованого у патенті US 3,433,534 для зрівноваження різних обертових тіл, зокрема автомобільних і авіаколіс [34]. З рисунка видно, що до обода колеса 1 кріпиться АБП 2, усередині якого знаходяться кулі 3. Один АБП зрівноважує колесо в одній площині корекції, що забезпечує усунування статичного дисбалансу. Два АБП, розташовані з протилежних сторін обода, усувають повний дисбаланс.

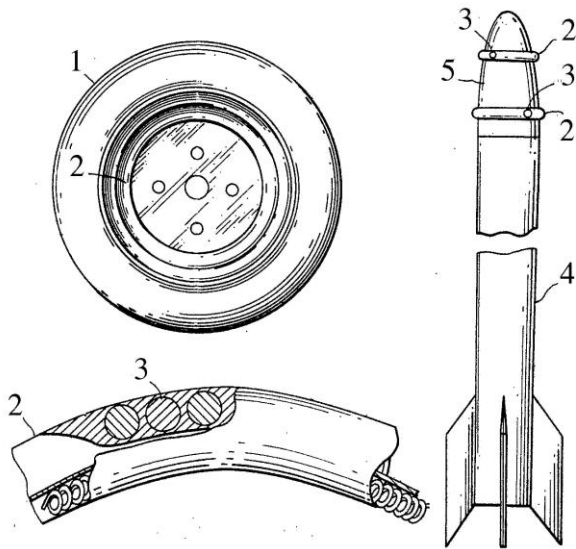


Рис. 1.16. Patent US 3,433,534 - зрівноваження обертових тіл - автомобільних і авіаколіс, боєголовки ракети:  
1 – колесо, 2 – кульовий АБП, 3 – кулі, 4 – ракета, 5 – боєголовка

Зазначений патент цікавий тим, що на свій час встановив найбільш широку область застосування АБП. Так зазначено, що пристрій застосовний для зрівноваження: компонентів космічних кораблів (супутників); космічних станцій; боєголовок ракет і снарядів; авто і авіаколіс; шпинделів верстатів і т.п. На рис. 1.16 показана ракета 4 з боєголовкою 5, яку зрівноважують два АБП 3. Використання двох АБП забезпечує повне зрівноваження боєголовки.

Слід відзначити, що на свій час найбільш широка область застосування АБП вказана і в патенті US 3,799,616 [33]. Це зрівноваження: авто і авіаколіс; обертових антен; космічних станцій; корисних вантажів космічних ракет; боєголовок ракет; валів в прядильній промисловості; лопаток вертольотів. Нове використання АБП – для зрівноваження обертових тіл у польоті (снарядів, боєголовок, космічних станцій, супутників, тощо) цікаве тим, що із-за відсутності опор явище самоцентрування настає у таких тіл на будь-якій швидкості обертання тіла. Тому автобалансування тіл відбувається на будь-якій швидкості обертання.

Традиційне використання АБП у центрифугах побутових пральних машинах призвело до того, що з появою автоматичних пральних машин АБП почали використовуватися при зрівноваженні їх барабанів, розташованих як вертикально, так і горизонтально – рис. 1.17.

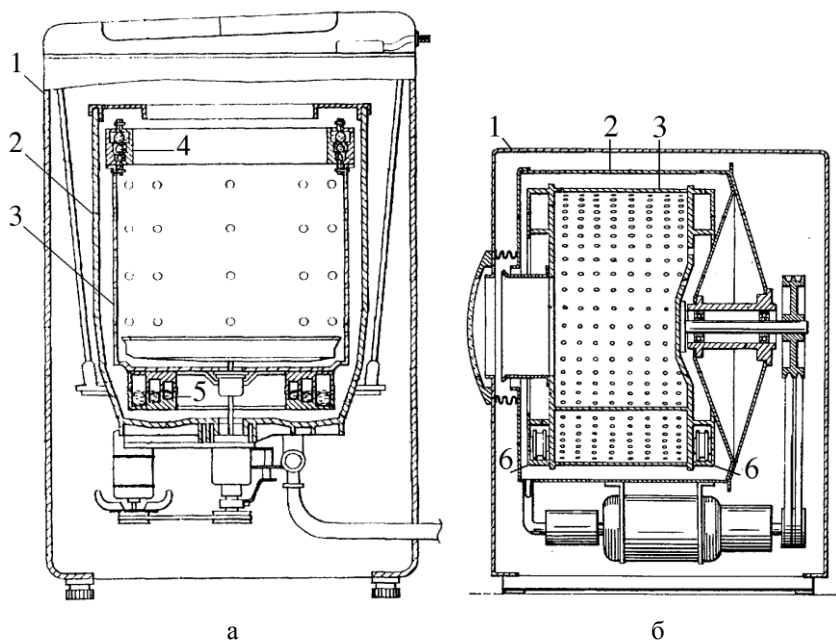


Рис. 1.17. Зрівноваження барабанів автоматичних пральних машин  
 а – з вертикальним (patent US 5,746,069),

б – горизонтальним (patent US 2,984,094) розташуванням барабана:  
 1 – корпус машини; 2 – бак; 3 – барабан; 4 – кульові АБП, розташовані один над одним; 5 – багаторядний АБП; 6 – роликів АБП

На рис. 1.17, а зображено використання кульового АБП при зрівноваженні барабана автоматичної пральної машини з вертикально розташованим барабаном, описане у патенті US 5,746,069 (один з останніх на цей час патентів) [18]. У верхній частині барабана зручно встановлювати АБП 4 один над одним, а у нижній частині – використовувати багаторядний АБП 5. Використання АБП у верхній і нижній частинах барабана забезпечує повне зрівноваження дисбалансу барабана з білизною. Проте слід відзначити, що у переважній більшості патентів вертикальні барабани зрівноважуються одним АБП.

На рис. 1.17, б показано зрівноваження горизонтально розташованого барабана автоматичної пральної машини роликів АБП, запропоноване у патенті US 2,984,094 (один з перших патентів) [21]. Барабан 3 зрівноважується з двох сторін роликів АБП 6. Це забезпечує усунення повного дисбалансу барабана з білизною.

Найбільш масове використання АБП одержали при зрівноваженні шліфувальних дисків ручних шліфувальних машин. На рис. 1.18



зображений приклад використання АБП при зрівноваженні ручної шліфувальної машини, запропонованого у патенті US 20020056338A1 (один з останніх патентів) [39]. Оскільки диск плоский, то найбільшу складову дисбалансу дає статична складова. Тому для її усунення використовується, як правило, один кульовий АБП. Він може бути як однорядним, так і дворядним.



Рис. 1.18. Patent US 20020056338A1 - зрівноваження шліфувальних дисків ручних шліфувальних машин:

1 – ручна шліфувальна машина, 2 – шліфувальний диск, 3 – АБП

Слід відзначити, що у патенті US 20020056338A1 вказано і на можливість використання розробленого АБП для зрівноваження CD і DVD дисків у відповідних приладах. Схожість у конструкції АБП, призначених для зрівноваження шліфувальних кругів і CD і DVD дисків викликана тим, що як в електроінструменті, так і в CD і DVD приладах об'єктом балансування є плоский диск, що обертається з швидкостями 5000-12000 *об/хв*.

На рис. 1.19 показана фотографія CD/DVD приладу з кульовим АБП, розробленого фірмою LG Electronics Inc. [187]. На фотографії видно, що прозорий диск має дисбаланс (Unbalanced Mass) і статично зрівноважується кулями, які розташувалися навпроти дисбалансу. АБП сумщений з шпинделем електродвигуна, на який кладеться CD/DVD диск.

Найбільш докладно використання різних типів АБП (майже усіх, що працюють за схемою A.Fesca) при зрівноваженні CD і DVD дисків описано у патенті US 6,373,154 [45] (власник - Samsung Electronics Co., Ltd.). Цей патент можна розглядати як певний екскурс в історію зрівноваження таких дисків АБП (посилання на 8 патентів і 2 наукові статті – з описом прототипів, та на 22 патенти – з описом аналогів

винаходу), та як наукову працю (на 32 сторінках), яка докладно описує використання різних АБП при зрівноваженні CD і DVD дисків. Ми не будемо наводити схем і креслень з цього патенту через їх специфічність.

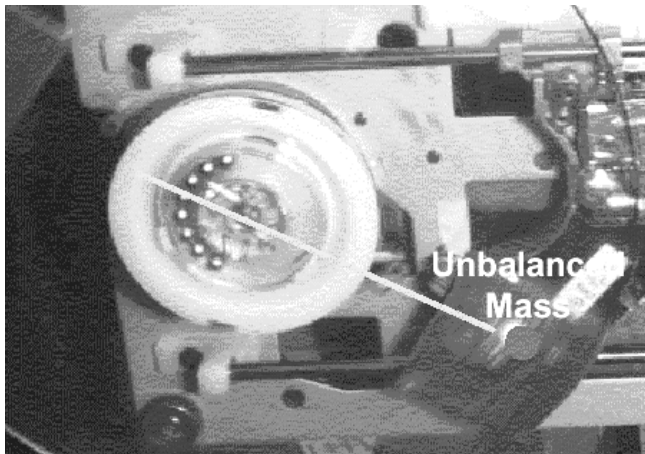


Рис. 1.19. Зрівноваження CD і DVD дисків

Удосконалення конструкцій АБП спостерігається і у традиційній області використання АБП – зрівноваження екстракторів, сепараторів, центрифуг тощо. На рис. 1.20 зображене зрівноваження сепараторів з вертикальним розташуванням барабана кульовим АБП, запропонованим у патенті US 6,132,354 [48].

З рис. 1.20, а,б видно, що барабан зрівноважується статично – одним АБП у одній площині корекції. Для встановлення АБП використовується простір поблизу осі обертання, який технологічно незадіяний. Як і в кульовому АБП Сирла, в цьому АБП кулі щільно притиснуті одна до одної, коли знаходяться у нижній частині АБП (рис. 1.20, в). Проте в АБП немає конічної частини, що розширюється, по якій в АБП Сирла кулі піднімаються і виходять на бігову доріжку. Для того, щоб кулі могли відхилитися в певний бік ротора і тим його зрівноважувати, запропоновано виконати бігову доріжку висотою, що більша за радіус куль у  $(1 + \sqrt{2})$  рази. Тоді кулі на доріжці зможуть розташовуватися у два ряди (рис. 1.20, г), максимально притискаючись одна до одної. Це забезпечує найменші габаритні розміри АБП у порівнянні з балансувальною ємністю.

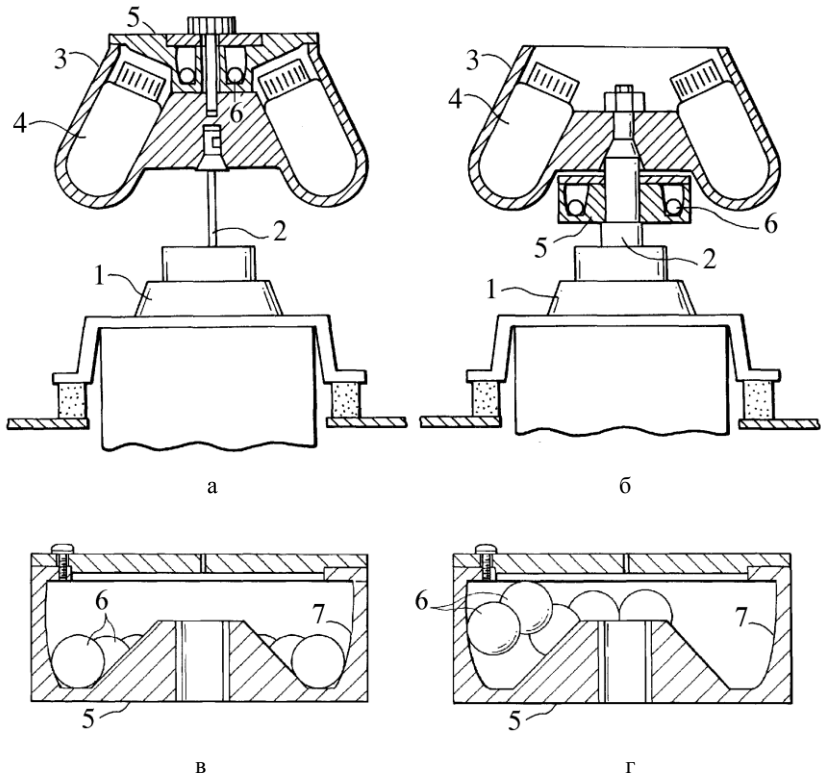


Рис. 1.20. Patent US 6,132,354 - зрівноваження екстракторів,  
 центрифуг, сепараторів:  
 1 – двигун, 2 – вал, 3 – барабан, 4 – ємності для рідини,  
 що обробляється; 5 – кульовий АБП; 6 – кулі; 7 – бігова доріжка

Перечислити усі удосконалення АБП, що працюють за схемою А.Феска, немає можливості. Пояснюється це великою кількістю патентів. Особливо у останній час спостерігається значне збільшення їх кількості. Поява нових патентів пов'язана як з розширенням областей застосування пасивних АБП, так і з удосконаленням їх конструкцій.

Нижче, за результатами огляду літературних джерел, у табл.1.1. наведений (далеко не повний) перелік основних виробників АБП, та об'єктів автобалансування.

## Приклади промислового використання АБП

Основні виробники АБП	Об'єкти автобалансування
General Motors Corporation; Todd Engineering Co., Ltd.; Machine Technology, inc.; Whirlpool Corporation; Eti Technology, inc.; SKF AutoBalance Systems; Atlas Copco Tools AB; Samsung Electronics Co., Ltd.; Electrolux Zanussi Electrodo- mestic S.p.A.; Matsushita Electric Industrial Co., Ltd.; LG Electronics Inc.; RMS Vibration Test Labora- tory; ETI Technologies Inc.; Hitachi Koki Co., Ltd., Тощо	<ul style="list-style-type: none"> <li>- шпинделі шліфувальних і поліру- вальних верстатів;</li> <li>- шпинделі верстатів у деревооброб- ній промисловості;</li> <li>- дискові пили;</li> <li>- автомобільні і авіакоlesa;</li> <li>- обертові частини двигунів внут- рішнього згорання;</li> <li>- ротори електродвигунів;</li> <li>- гвинти літаків;</li> <li>- лопатки вертольотів;</li> <li>- космічні станції, штучні супутники землі;</li> <li>- снаряди, боеголовки ракет;</li> <li>- вали у текстильній промисловості;</li> <li>- CD, DVD диски;</li> <li>- диски ручних шліфувальних машин;</li> <li>- горизонтальні і вертикальні бараба- ни екстракторів, сепараторів, цент- рифуг, зокрема побутових пральних машин;</li> <li>- вентилятори, тощо.</li> </ul>

### Висновки розділу 1

1. Пасивні АБП виникли як пристрої, призначені для зрівноважуван-  
ня на ходу роторів на закритичних швидкостях обертання – швидкостях,  
після яких починає проявлятися явище самоцентрування ротора.

2. Нові конструкції пасивних АБП з твердими КВ виникли у зв'язку  
з модифікаціями КВ, бігових доріжок, зміною кількості і умов встанов-  
лення КВ і т.д., але рух КВ відносно ротора не змінився. Якщо зазначи-  
ти, що А.Feska у своєму винаході вказав, що автобалансувальні власти-  
вості має будь-який КВ, центр мас якого рухається по колу з центром на  
осі вала і площиною, перпендикулярною цій осі, то стає очевидним, що  
всі ці АБП використовують схему балансування і віброзахисту А.Feska.

3. Один класичний АБП здатний повністю зрівноважити статичний  
дисбаланс у власній площині корекції. У силу особливостей відносного  
руху КВ, один пристрій додатково демпфірує крутильні і поперечні

вібрації ротора (маятниковий і сегментний АБП з в'язями – тільки поперечні). Два АБП, встановлені у паралельних площинах корекції, здатні повністю зрівноважити жорсткий ротор і додатково демпфують крутильні, кутові і поперечні вібрації ротора (маятниковий і сегментний АБП з в'язями не демпфують крутильні вібрації).

4. Перевагами класичних АБП є дешевизна, простота конструкції, надійність у роботі. Спільними недоліками є: дія КВ із значними силами на вал (маятники, кільця), чи бігову доріжку (кулі, ролики, сегменти, тощо), навіть при відсутності дисбалансу; внесення КВ під час розгону чи гальмування ротора додаткового дисбалансу, що робить ці процеси неспокійними; чутливість КВ до зміни швидкості обертання ротора (за винятком маятникових і сегментних АБП з в'язями), та інші.

5. На сьогодні не вирішене питання, чи є схеми зрівноваження і віброзахисту роторів твердими КВ відмінні від класичної, відсутня теорія зрівноваження і віброзахисту ротора твердими КВ та немає простих і ефективних методів визначення умов настання автобалансування.

6. Аналіз стану розвитку теорії і практики зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП дозволяє сформулювати мету першої частини монографії як: створення інженерної теорії зрівноваження і віброзахисту ротора АБП з твердими КВ. Для її досягнення необхідно:

1) визначити, за яких умов тверді КВ можуть зрівноважити ротор у певній площині корекції, зокрема положення цієї площини, кінематику руху КВ, їх геометричні і масо-інерційні характеристики;

2) розробити нові схеми автобалансування і віброзахисту роторів твердими КВ, з рухом КВ, принципово відмінним від класичного, розробити відповідні конструкції АБП;

3) розробити інженерний (наближений) метод визначення умов настання автобалансування, застосувати його до жорстких роторів при різному пружному закріпленні, та до гнучких роторів, і одержати відповідні умови автобалансування.

## РОЗДІЛ 2. ІНЖЕНЕРНА ТЕОРІЯ ЗРІВНОВАЖЕННЯ І ВІБРОЗАХИСТУ РОТОРІВ ПАСИВНИМИ АБП З ТВЕРДИМИ КВ

### 2.1. Умови зрівноваження ротора твердими КВ

Нехай у точці  $K$  осі вала підвішене АТТ (рис. 2.1). Припускаємо, що виконуються наступні умови ідеального зрівноважування ротора:

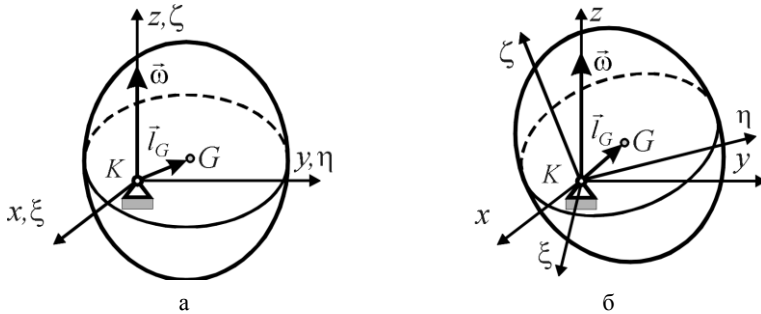


Рис. 2.1. АТТ з нерухомою точкою на осі вала ротора:  
а – до, б – після повороту навколо точки  $K$

1) рух системи ротор - АТТ установився, у результаті чого відносний рух АТТ припинився, і система обертається із сталою кутовою швидкістю;

2) вісь вала сумістилася з віссю обертання;

3) сили ваги помітно не впливають на рух системи і їхньою дією можна знехтувати.

Щоб АТТ могло зрівноважувати дисбаланс, його центр мас не повинний збігатися з точкою підвісу. Відстань від точки підвісу до центра мас АТТ позначимо через  $l$ . Балансувальна ємність АТТ

$$S = ml, \quad (2.1)$$

де  $m$  – маса АТТ.

Проведемо через точку  $K$  головні осі інерції АТТ і позначимо їх через  $\xi, \eta, \zeta$ . Нехай відносно них головні осьові моменти інерції -  $J_\xi, J_\eta, J_\zeta$ . Рух АТТ навколо нерухомої точки задають рівняння Ейлера [243]:

$$J_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + (J_\zeta - J_\eta)\omega_\eta\omega_\zeta = M_\xi, \quad J_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + (J_\xi - J_\zeta)\omega_\xi\omega_\zeta = M_\eta,$$

$$J_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} + (J_\eta - J_\xi)\omega_\xi\omega_\eta = M_\zeta, \quad (2.2)$$

де:  $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$  - проекції кутової швидкості АТТ на осі  $\xi, \eta, \zeta$ ;  
 $M_\xi, M_\eta, M_\zeta$  - моменти зовнішніх сил щодо осей  $\xi, \eta, \zeta$ .

В усталених рухах похідні дорівнюють нулю. З зовнішніх сил моменти утворюють сили ваги, але за припущенням їхнім впливом можна знехтувати. Тоді рівняння усталеного руху АТТ приймуть вид

$$(J_\zeta - J_\eta)\omega_\eta\omega_\zeta = 0, \quad (J_\xi - J_\zeta)\omega_\zeta\omega_\xi = 0, \quad (J_\eta - J_\xi)\omega_\xi\omega_\eta = 0. \quad (2.3)$$

Будемо розглядати рівняння (2.3) як умови. При їх виконанні головний момент сил інерції АТТ відносно точки  $K$  дорівнює нулеві і сили інерції не відхиляють АТТ від положення, у якому воно зрівноважує ротор. Також сили інерції зводяться до рівнодіючої, котра прикладена в точці  $K$ . Оскільки всі елементарні сили інерції перпендикулярні осі вала, то і їх рівнодіюча перпендикулярна осі. Тому площина корекції АТТ проходить через точку підвісу  $K$  і перпендикулярна повздовжній осі ротора.

Проведемо через точку  $K$  рухомі осі  $x, y, z$ . Нехай при цьому вісь  $z$  збігається з віссю обертання і спрямована убік вектора кутової швидкості  $\vec{\omega}$ , а осі  $x, y$  обертаються з цією швидкістю разом з ротором і спрямовані так, що система осей права. Зауважимо, що  $\omega = \omega_z = \text{const}$ . В усталених рухах осі  $\xi, \eta, \zeta$  займають по відношенню до осей  $x, y, z$  визначене фіксоване положення й обертаються разом з ними з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Розглянемо наступні принципово різні випадки одержання осей  $\xi, \eta, \zeta$  з осей  $x, y, z$ .

1. Осі  $\xi, \eta, \zeta$  можуть бути отримані з осей  $x, y, z$  поворотом навколо осі  $z$  на кут  $\theta$  (рис. 2.2).

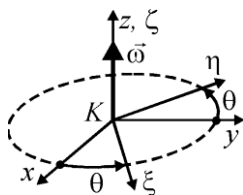


Рис. 2.2. Одержання осей  $\xi, \eta, \zeta$  з осей  $x, y, z$  поворотом на кут  $\theta$  навколо осі  $z$

Зауважимо, що саме АТТ може робити довільні сферичні рухи. Тоді вісь  $z$  головна вісь інерції,

$$\omega_\xi = \omega_\eta = 0, \quad \omega_\zeta = \omega, \quad (2.4)$$

і рівняння (2.3) виконуються тотожно.

У цьому випадку одне АТТ не може зрівноважити довільний за величиною дисбаланс. В ustalених рухах його центр мас рухається в площині корекції по колу. Дисбаланс, що їм зрівноважується, сталий за величиною і може змінювати тільки напрямком. Довільний дисбаланс можуть зрівноважити два АТТ, але при виконанні додаткової умови:

$$m_1 l_1 = m_2 l_2, \quad (2.5)$$

- у АТТ однаковий добуток маси на відстань від центра мас до осі вала. Ця умова необхідна для того, щоб при відсутності дисбалансу два АТТ могли один одного зрівноважити.

2. Осі  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  можуть бути отримані з осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  одним поворотом навколо осі  $x$  ( $y$ ) на кут  $\varphi$  (рис. 2.3).

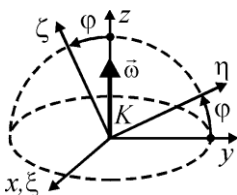


Рис. 2.3. Одержання осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  з осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  поворотом на кут  $\varphi$  навколо осі  $x$  ( $y$ )

Саме АТТ може робити довільні сферичні рухи. Тоді

$$\omega_\xi = 0, \quad \omega_\eta, \omega_\zeta \neq 0, \quad (2.6)$$

і з рівнянь (2.3) знаходимо наступну умову

$$J_\eta = J_\zeta. \quad (2.7)$$

При відсутності дисбалансу центр мас АТТ повинний знаходитися на осі вала. З урахуванням послідовності поворотів осей це буде можливо, якщо центр мас АТТ буде знаходитися в площині  $K\eta\zeta$ . У силу умови (2.7) кожна вісь, що лежить у цій площині і проходить через точку  $K$  – головна. Тому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що в головних осях  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  центр мас АТТ повинний мати координати

$$\bar{l}_G = (0, 0, -l). \quad (2.8)$$

Один АТТ може зрівноважити складову дисбалансу, що лежить на осі  $\eta$ . Для зрівноваження другої складової, що лежить на осі  $\xi$ , треба встановлювати друге АТТ. Таким чином, в розглядуваному випадку дисбаланс у одній площині корекції можуть зрівноважити два АТТ, що повертаються навколо осей, перпендикулярних повздовжній осі ротора.

3. Осі  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  можуть бути отримані з осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  двома послідовними поворотами: навколо осі  $z$  на кут  $\theta$ ; навколо осі  $\xi$  на кут  $\varphi$  (рис. 2.4).



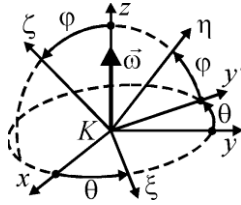


Рис. 2.4. Одержання осей  $\xi, \eta, \zeta$  з осей  $x, y, z$  поворотами на кут  $\theta$  навколо осі  $z$  і на кут  $\varphi$  навколо осі  $\xi$

Саме АТТ може робити довільні сферичні рухи. Тоді

$$\omega_{\xi} = 0, \quad \omega_{\eta}, \omega_{\zeta} \neq 0, \quad (2.9)$$

і з рівнянь (2.3) знову одержуємо умови (2.7), (2.8). В цьому випадку дисбаланс ротора може зрівноважити одне АТТ.

4. Осі  $\xi, \eta, \zeta$  можуть бути отримані з осей  $x, y, z$  двома послідовними поворотами: навколо осі  $x$  на кут  $\varphi$ ; навколо осі  $\eta$  на кут  $\psi$  (рис. 2.5).

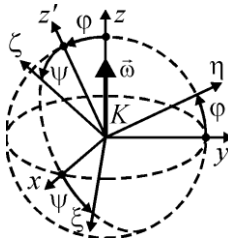


Рис. 2.5. Одержання осей  $\xi, \eta, \zeta$  з осей  $x, y, z$  поворотами на кут  $\varphi$  навколо осі  $x$  і на кут  $\psi$  навколо осі  $\eta$

Саме АТТ може робити довільні сферичні рухи. Тоді

$$\omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta} \neq 0, \quad (2.10)$$

і з рівнянь (2.3) знаходимо наступні умови

$$J_{\xi} = J_{\eta} = J_{\zeta}. \quad (2.11)$$

Через симетрію тензора інерції, не обмежуючи загальності, можна вважати, що в головних осях  $\xi, \eta, \zeta$  центр мас АТТ має координати

$$\vec{l}_G = (0, 0, -l). \quad (2.12)$$

5. Осі  $\xi, \eta, \zeta$  можуть бути отримані з осей  $x, y, z$  трьома послідовними поворотами: навколо осі  $z$  на кут  $\theta$ ; навколо осі  $x'$ , у яку переходить вісь  $x$  після першого повороту на кут  $\varphi$ ; навколо осі  $\eta$  на кут  $\psi$  (рис. 2.6). Цей випадок, як і попередній, приводить до умов (2.11), (2.12).

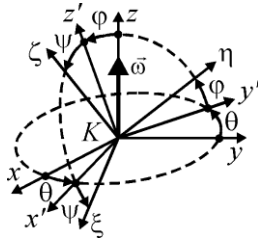


Рис. 2.6. Одержання осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  з осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  поворотами: на кут  $\theta$  навколо осі  $z$ ; на кут  $\phi$  навколо осі  $x'$ ; у яку переходить вісь  $x$  після першого повороту; на кут  $\psi$  навколо осі  $\eta$

У розглянутих випадках передбачалося, що АТТ може робити довільні сферичні рухи навколо точки підвісу. Для зрівноважування ротора така кількість степенів вільності може бути надмірною. Однак у сферичному русі АТТ, встановлене в в'язкому середовищі, може одночасно зрівноважувати ротор і демпфірувати його вібрації (кутові і крутильні коливання). Накладення на рух АТТ додаткових в'язів дозволяє одержувати АБП, що синхронно обертаються разом з ротором. Це можна використовувати для зрівноважування роторів, у яких швидкість обертання змінюється у процесі експлуатації.

## 2.2. Геометричні і масо-інерційні характеристики КВ, з нерухомою точкою на повздожній осі ротора

Оскільки в попередньому підрозділі встановлено, що АТТ, які задовольняють умовам (2.7), (2.8), або (2.11), (2.12) можуть зрівноважити ротор, то виникають задачі: визначення конкретних КВ, що цим умовам задовольняють; визначення їх геометричних і масо-інерційних характеристик. Нижче ці дві задачі і розв'язуються.

Елементарною системою, що задовольняє умовам (2.7), (2.8) є два зв'язаних під прямим кутом математичних маятника (рис. 2.7, а). З елементарної системи можна одержати інші КВ, що задовольняють цим умовам. Це два зв'язаних під прямим кутом стержня або фізичних маятника (рис. 2.7, б, в), півкільце і півкруг (рис. 2.7, м, д). З плоских фігур можна одержувати об'ємні. При цьому за властивістю головних осей [243], останні повинні бути симетричні щодо площини вихідної фігури. Так умовам (2.7), (2.8) задовольняють порожнистий і суцільний напівциліндри (рис. 2.7, е, ж).

Елементарна система, що задовольняє умовам (2.10), (2.11), складається з трьох взаємно-перпендикулярних математичних маятників (рис. 2.7, з). З цієї системи можна одержати інші КВ, що задовольняють

цим умовам. Це три взаємно-перпендикулярних стержня або фізичних маятника у вигляді тіл обертання (рис. 2.7, и, к). Цим умовам задовольняють півсфера і півкуля (рис. 2.7, л, м). КВ, що задовольняють умовам (2.10), (2.11) задовольняють і умови (2.7), (2.8).

З об'ємних КВ при найменших габаритах найбільша балансувальна ємність у півкулі, а найменша – у трьох з'єднаних під прямим кутом математичних маятників. Серед плоских КВ найбільша балансувальна ємність у півкруга, а найменша – у двох з'єднаних під прямим кутом математичних маятників.

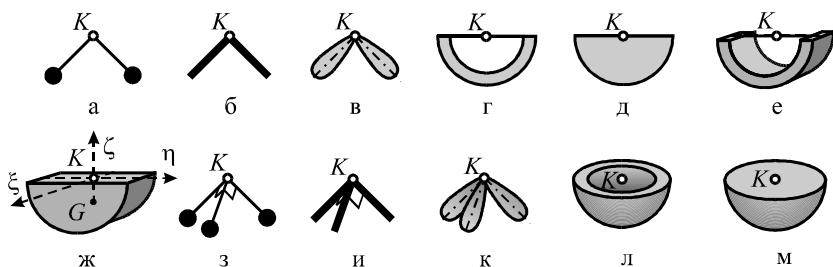


Рис. 2.7. КВ з нерухомою точкою на осі вала ротора

Геометричні і масо-інерційні характеристики названих КВ були знайдені групою авторів - Г.Б.Філімонініним, Ю.А.Невдахою, В.С.Сотніковим в роботі [138]. Особисто автором монографії розроблена форма таблиці з характеристиками і вказані КВ, для яких треба визначити характеристики.

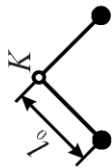
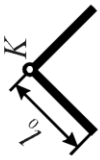
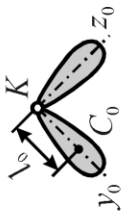
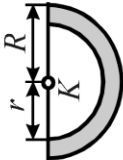
Геометричні і масо-інерційні характеристики КВ наведені у табл. 2.1, 2.2.

В таблицях використані такі позначення:

- $m$  – маса,  $V$  – об'єм,  $S$  – балансувальна ємність КВ;
- $l$  – відстань від центра мас КВ до нерухомої точки на осі ротора;
- $A$  – осьовий момент інерції КВ відносно осі  $\xi$ ,  $B$  –  $\eta$ ,  $\zeta$ ;
- $R$  – радіус півкруга, суцільного напівциліндра, чи зовнішній радіус порожнистого напівциліндра;
- $r$  – внутрішній радіус півкільця чи порожнистого напівциліндра.
- $m_0$  – маса одного маятника, стержня, фізичного маятника;
- $l_0$  – довжина математичного маятника, однорідного стержня, чи відстань від точки підвісу до центра мас фізичного маятника;
- $J_{x_0}, J_{y_0}, J_{z_0}$  – осьові моменти інерції фізичних маятників відносно осей  $x_0, y_0, z_0$ , які показані на відповідних схемах;
- $\gamma'$  – питома вага матеріалу, з якого виготовлений КВ.

Табл. 2.1

Геометричні і масо-інерційні характеристики КВ, у яких  $J_x = A$ ,  $J_y = J_z = B$ , початок

Тип КВ	Задані величини	$V$	$m$	$l$	$S$	$A$	$B$
1	2	3	4	5	6	7	8
	$m_0, l_0$	-	$2m_0$	$\frac{l_0}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}m_0l_0$	$2m_0l_0^2$	$m_0l_0^2$
	$m_0, l_0$	-	$2m_0$	$\frac{l_0}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}m_0l_0}{2}$	$\frac{2}{3}m_0l_0^2$	$\frac{m_0l_0^2}{3}$
	$m_0, l_0,$ $J_{x_0}, J_{y_0},$ $J_{z_0}$	-	$2m_0$	$\frac{l_0}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}m_0l_0$	$2J_{x_0}$	$J_{y_0} + J_{z_0}$
	$R, m_0,$ $a=r/R$	-	$m_0$	$\frac{4R}{3\pi} \times$ $\frac{1-a^3}{1-a^2}$	$\frac{4Rm_0}{3\pi} \times$ $\frac{1-a^3}{1-a^2}$	$\frac{m_0R^2}{2} \times$ $(1-a^2)$	$\frac{m_0R^2}{4} \times$ $(1-a^2)$

Закінчення табл. 2.1

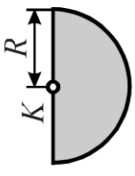
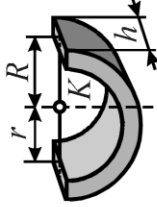
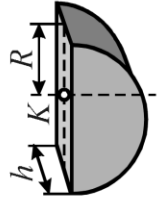
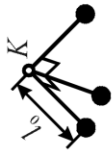

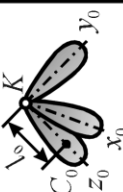

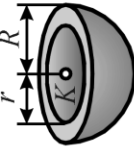
1		2	$R, m_0$	3	-	4	$m_0$	5	$\frac{4R}{3\pi}$	6	$\frac{4Rm_0}{3\pi}$	7	$\frac{m_0R^2}{2}$	8	$\frac{m_0R^2}{4}$
		2	$R, h, \gamma, a=r/R$	3	$\frac{\pi R^2 h}{2} \times (1-a^2)$	4	$\frac{\pi R^2 h \gamma}{2} \times (1-a^2)$	5	$\frac{4R}{3\pi} \times \frac{1-a^3}{1-a^2}$	6	$\frac{2R^3 h \gamma}{3} \times (1-a^3)$	7	$\frac{\pi R^4 h \gamma}{4} \times (1-a^4)$	8	$\frac{\pi R^4 h \gamma}{8} \times (1-a^4) + \frac{\pi R^2 h^3 \gamma}{24} \times (1-a^2)$
		2	$R, h, \gamma$	3	$\frac{\pi R^2 h}{2}$	4	$\frac{\pi R^2 h \gamma}{2}$	5	$\frac{4R}{3\pi}$	6	$\frac{2R^3 h \gamma}{3}$	7	$\frac{\pi R^4 h \gamma}{4}$	8	$\pi R^2 h \gamma \times \left( \frac{R^2}{8} + \frac{h^2}{24} \right)$

Табл. 2.2

Геометричні і масо-інерційні характеристики КВ, у яких  $J_{\xi} = J_{\eta} = J_{\zeta} = A$ 

Тип КВ	Задані величини	$V$	$m$	$l$	$S$	$A$
	$m_0, l_0$	-	$3m_0$	$\frac{l_0}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}m_0l_0$	$2m_0l_0^2$
	$m_0, l_0$	-	$3m_0$	$\frac{l_0}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}m_0l_0}{2}$	$\frac{2}{3}m_0l_0^2$
	$m_0, l_0,$ $J_{x_0} = J_{y_0},$ $J_{z_0} (< J_{x_0})$	-	$3m_0$	$\frac{l_0}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}m_0l_0$	$J_{z_0} + 2J_{x_0}$
	$R, \gamma$	$\frac{2}{3}\pi R^3$	$\frac{2}{3}\pi R^3\gamma$	$\frac{3}{8}R$	$\frac{\pi R^4\gamma}{4}$	$\frac{4}{15}\pi R^5\gamma$
	$R, \gamma,$ $a = r/R$	$\frac{2}{3}\pi R^3(1-a^3)$	$\frac{2}{3}\pi R^3\gamma(1-a^3)$	$\frac{3}{8}R \frac{1-a^4}{1-a^3}$	$\frac{\pi R^4\gamma}{4}(1-a^4)$	$\frac{4}{15}\pi R^5\gamma(1-a^5)$

Положення КВ відносно осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  показане на рис. 2.7, ж.

Між величинами у табл. 2.1, 2.2 такий зв'язок

$$m = \gamma' \cdot V, \quad S = m \cdot l, \quad (2.13)$$

причому перша формула стосується КВ, які мають на схемах об'єм.

При обчисленні геометричних і масо-інерційних характеристик КВ були використані такі відомі формули [243]:

$$J_x^{(\text{маятн.})} = m_0 l_0^2, \quad J_x^{(\text{стержня})} = m_0 l_0^2 / 2, \\ V^{(\text{цил.})} = \pi R^2 h, \quad J_x^{(\text{цил.})} = \frac{1}{2} m_0 R^2, \quad S_x^{(\text{напівцил.})} = \frac{4R}{3\pi} m_0, \quad (2.14)$$

де:  $J_x^{(\text{маятн.})}$ ,  $J_x^{(\text{стержня})}$ ,  $J_x^{(\text{цил.})}$  – відповідно осьові моменти інерції математичного маятника чи стержня - відносно перпендикулярної осі, що проходить через його кінець, осьовий момент інерції циліндра відносно центральної осі;  $V^{(\text{цил.})}$  – об'єм циліндра;  $S^{(\text{півцил.})}$  – статичний момент напівциліндра відносно площини, яка ділить утворюючий його циліндр на дві частини.

Аналіз знайдених характеристик дозволяє встановити такі властивості різних АТТ.

1. АТТ у таблицях розташовані у порядку зростання балансувальної ємності у порівнянні з габаритними розмірами, які займають. Так у табл. 2.1 найбільші габаритні розміри у порівнянні з балансувальною ємністю мають два зв'язаних під прямим кутом математичних маятника, а найменші - напівциліндр.

2. При рівній балансувальній ємності більшу масу мають КВ менших габаритних розмірів.

3. При рівній балансувальній ємності сили інерції, що діють на КВ більших габаритних розмірів, мають більші плечі відносно нерухомої точки на осі ротора. Це збільшує чутливість КВ до вібрацій, і тому підвищує якість балансування.

Вказані властивості треба враховувати при проектуванні АБП.

За допомогою складених таблиць можна обчислити і оцінити наступні технічні характеристики АТТ (АБП):

- балансувальну ємність  $S$ ;
- габаритні розміри (за параметрами  $l_0$ ,  $R$ );
- масу  $m$ ;
- чутливість до сил інерції (за параметром  $l$ ).

Розглянемо деякі особливості зрівноваження ротора класичними і некласичними КВ (рис. 2.8).

Класичні КВ, навіть у зрівноваженому роторі діють на вал, ротор, чи бігову доріжку із значними силами, бо знаходяться на відстані від осі обертання (рис. 2.8, а). Тому, наприклад, в кульовому АБП кільцева біго-

ва доріжка перетворюється на еліптичну, точка контакту кулі і доріжки у пляму контакту і т.д. Це знижує якість балансування ротора, особливо при малих і середніх дисбалансах, а також при великих кутових швидкостях обертання ротора. Крім того, під час пуску і вибігу ротора КВ вносять додатковий дисбаланс в систему, бо займають відносно ротора довільне положення. Це робить процеси розгону і вибігу неспокійними.

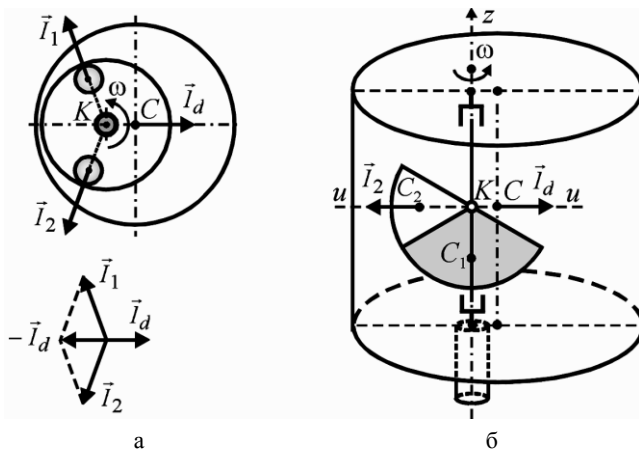


Рис. 2.8. Зрівноваження статичного дисбалансу ротора:  
а - класичним КВ (кулями); б - некласичним КВ

Некласичні КВ рухаються навколо точки на повздовжній осі вала ротора, причому цей рух не є обертанням навколо цієї осі. Загальною перевагою таких КВ над класичними, є (рис. 2.8, б): дія на ротор, осі, на які насаджені КВ і т.п. рівно з такими силами, які потрібні для зрівноваження дисбалансу, що забезпечує більшу точність зрівноваження ротора, особливо при невеликих дисбалансах; у вертикально розташованих роторах на малих швидкостях обертання ротора КВ під дією сил ваги приходять у нейтральне положення - положення, у якому центр мас КВ знаходиться на осі вала ротора і вони не вносять додатковий дисбаланс у систему, що забезпечує спокійний розбіг і вибіг ротора.

На рис. 2.9 показані різні способи виконання КВ.

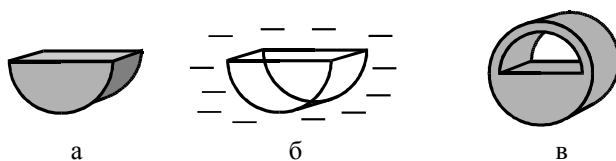


Рис. 2.9. Способи утворення КВ:  
а – важке тіло; б – поплавок у важкій рідині; в – отвори у суцільному тілі



Як класичні, так і некласичні КВ можуть бути виконані трьома різними способами як: важке тіло; поплавок у важкій рідині; отвори у суцільному тілі.

### **2.3. Схеми зрівноваження і віброзахисту роторів. Класифікація АБП з твердими КВ**

З огляду конструкцій пасивних АБП з твердими КВ і теорії зрівноваження ротора АТТ видно, що рух КВ відносно ротора впливає на: особливості зрівноваження ротора; тип вібрацій ротора, які КВ здатний буде при цьому демпфірувати. Тому за основну ознаку, яка розрізняє різні схеми віброзахисту і зрівноваження роторів, доцільно ввести вид руху КВ відносно ротора. Розглянемо можливі схеми і відповідні пристрої.

**1. Класична схема – у якій КВ повертаються навколо повздовжньої осі ротора (рис. 2.2).** В цій схемі положення КВ в одному усталеному русі можуть бути одержані з положень КВ в іншому усталеному русі шляхом повороту КВ навколо повздовжньої осі ротора. Сам КВ може здійснювати і інші рухи відносно ротора. Наприклад, кулі у АБП Сирла до виходу на бігову доріжку можуть рухатися по конічним напрямним, або у випадку, коли діаметр поперечного переріза кільцевої доріжки більший за діаметр кулі у перехідних режимах стає можливим певне відхилення кулі від руху по колу. За такою схемою працюють всі класичні АБП, зокрема ті, що розглянуті у розділі I. На рис. 1.7 зображені різні КВ, що використовуються в класичних АБП, а на рис. 1.8 - відповідні типи пристроїв - кільцеві, кульові, роликові, маятникові, сегментні, тощо. В реалізації класичної схеми видні два варіанти. Розглянемо їх.

**1.1. Класична схема А.Феска.** В цій схемі на рух КВ не накладені ніякі додаткові в'язі. Пристрої, що працюють за схемою А.Феска, схематично зображені на рис. 1.8, а-д, ж. У силу особливостей відносного руху КВ, один КВ демпфірує повздовжні кутові вібрації ротора, і його (лінійні) поперечні коливання, що відбуваються у напрямку, перпендикулярному вектору дисбалансу КВ. Дещо менше КВ демпфірує поперечні кутові вібрації ротора. Оскільки в одному АБП використовуються два і більше КВ, то один пристрій найбільш ефективно демпфірує повздовжні кутові і (лінійні) поперечні вібрації ротора. Дещо менше демпфіруються поперечні кутові вібрації ротора. Проте два пристрої здатні демпфірувати як кутові, так і (лінійні) поперечні коливання ротора. Один АБП здатний зрівноважити статичний дисбаланс ротора у одній площині корекції, а два таких АБП – повний дисбаланс ротора у двох площинах корекції.

**1.2. Класична схема з в'язями.** На відміну від схеми А.Феска, у цьому способі зрівноваження і віброзахисту роторів, на рух КВ накладені в'язі, які дозволяють КВ попарно повертатися навколо повздовжньої осі ротора на рівні кути у протилежні боки. Відповідні АБП схематично

зображені на рис. 1.8, е,з. У силу особливостей відносного руху КВ пристрої майже не чутливі до зміни швидкості обертання ротора і обертаються з ротором синхронно. Це дозволяє використовувати пристрої при зрівноваженні роторів, швидкість яких змінюється під час експлуатації. АБП не демпфірують повздовжні кутові вібрації ротора, а у решті автобалансуючих і демпфіруючих властивостей аналогічні пристроям, що працюють за схемою А.Феска.

В класичних АБП основною ознакою, яка характеризує тип пристрою, є вид КГ, що використовується. Також розрізняє ці АБП наявність, чи відсутність в'язей, накладених на рухи КВ. Наявність решти ознак уточнює конструкцію АБП, але схема зрівноваження і віброзахисту при цьому не змінюється. Тому пропонується розрізнити основні типи класичних АБП за цими двома ознаками.

Будемо позначати розглянуті класичні схеми як  $K_n$ , де  $n=1$  для схеми Феска і  $n=2$  для класичної схеми з в'язями.

**2. Некласичні схеми – схеми, у яких КВ в ustalених рухах обертаються не навколо осі вала ротора.** Встановлення автобалансувальних властивостей АТТ з нерухою точкою на повздовжній осі вала ротора дозволяє розробити нові схеми зрівноваження і віброзахисту роторів, відмінні від класичних. Загальною перевагою таких схем над класичною є те, що КВ в них діють на вал, ротор, осі, на які насаджені тощо рівно із такими силами, які потрібні для зрівноваження ротора. У вертикально розташованому роторі КВ займають при нерухоному роторі нейтральне положення – у якому центри мас КВ на осі обертання. Це забезпечує спокійний розбіг і вибіг ротора. Розглянемо некласичні схеми і приклади відповідних АБП.

**2.1. Схема, у якій КВ повертаються навколо поперечних осей ротора (рис. 2.3).** В [9,153,161] описані конструкції АБП, у яких КВ повертаються навколо поперечних осей вала ротора. На рис. 2.10, а, б зображені приклади пристроїв.

АБП містить два КВ, вільно насаджених на поперечні осі вала ротора. Два КВ зрівноважують дисбаланс ротора у взаємно перпендикулярних напрямках. У силу особливостей відносного руху КВ, вони демпфірують лінійні поперечні і поперечнокутові вібрації ротора, і майже не чутливі до поздовжньокутових вібрацій. Такі АБП мають додаткову перевагу - КВ в них синхронно обертаються разом з ротором, що робить їх нечутливими до зміни кутової швидкості обертання ротора і значно прискорює процес балансування. Недоліком пристрою є те, що він зрівноважує різні за величиною найбільші дисбаланси в залежності від їх напрямків. Крім того, наявність двох КВ збільшує габаритні розміри пристроїв і ускладнює їх конструкцію.

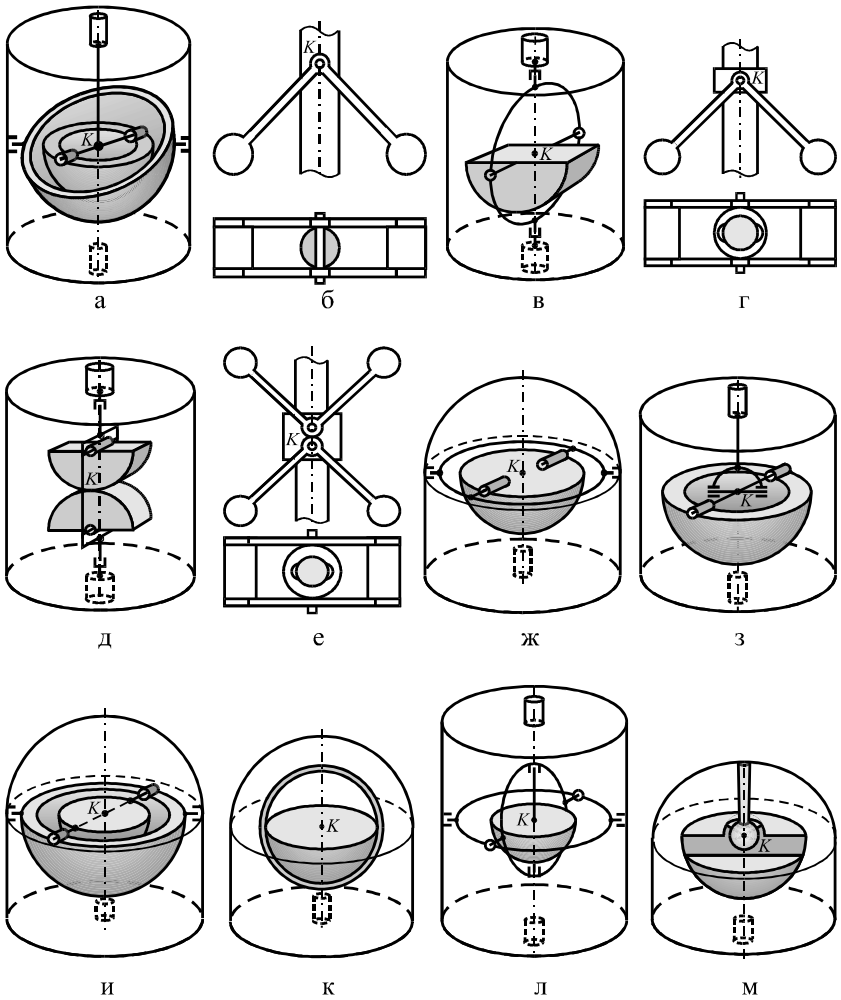


Рис. 2.10. Некласичні АБП

**2.2. Схема, у яких КВ повертаються навколо поперечних і повздовжньої осі вала ротора (рис. 2.4).** Один КВ, що рухається за такою схемою, може зрівноважити статичний дисбаланс ротора у площині, що перпендикулярна валу і проходить через точку, у якій перетинаються дві осі обертання КВ. У силу особливостей руху КВ демпфірує повздовжньокутові вібрації ротора і лінійні поперечні, та кутові

поперечні вібрації, які відбуваються у площині, перпендикулярній поперечній осі обертання КВ.

В [9,91-94,153] описані конструкції АБП, у яких КВ повертаються навколо поперечних і поздовжньої осі вала ротора. На рис. 2.10, в-е зображені приклади пристроїв. В пристроях, зображених на рис. 2.10, д, е встановлені два однакових КВ і на їх рухи накладені в'язі, що дозволяють повертатися КВ на рівні кути у протилежні боки. Такі пристрої в вертикально розташованих роторах не чутливі до сил ваги.

Перевагою пристроїв, зображених на рис. 2.10, в, г - є те, що дисбаланс ротора зрівноважує один КВ, що спрощує конструкцію пристроїв. Перевагою пристроїв, зображених на рис. 2.10, д, е - є нечутливість КВ до сил ваги в вертикально розташованих роторах, що збільшує точність зрівноваження ротора, особливо на невеликих швидкостях обертання. Недоліком пристроїв є те, що при зміні напрямку невеликого дисбалансу (наприклад на  $90^0$ ) КВ вимушені повертатися на такий самий кут. Це зменшує точність зрівноваження ротора при невеликих дисбалансах.

**2.3. Схема, у якій КВ повертаються навколо двох осей, які не є подовжньою віссю ротора.** В [9,160] описані конструкції АБП, у яких КВ обертаються навколо двох осей, які не є подовжньою віссю вала ротора. На рис. 2.10, ж, з зображені приклади пристроїв. АБП має один КВ. Перевагами таких АБП є те, що: дисбаланс у одній площині корекції зрівноважує один КВ; при зміні напрямку невеликого дисбалансу КВ повертається відносно точки на осі вала ротора на невеликий кут; КВ майже не чутливі до зміни кутової швидкості обертання ротора. Недоліком пристроїв є відносна складність виконання підвісу КВ.

У силу особливостей відносного руху КВ такі АБП здатні демпфірувати лінійні поперечні і поперечно-кутові вібрації ротора і майже не демпфірують поздовжньокутові вібрації.

**2.4. Схема, у якій КВ здійснюють сферичний рух навколо точки на осі вала.** У силу особливостей відносного руху КВ він здатний демпфірувати лінійні поперечні і кутові вібрації ротора. В [9,129-132] описані конструкції відповідних АБП. За властивістю зрівноважувати ротор і одночасно демпфірувати його коливання вони названі автобалансирами-демпферами (АБД). На рис. 2.10, к-м зображені приклади пристроїв. АБД має один КВ. Сферичний рух КВ надається: заключенням КВ в порожнисту сферу, а цієї сфери – у сферичну порожнину ротора (рис. 2.10, к); кардановим підвісом (рис. 2.10, л); сферичним шарніром (рис. 2.10, м).

Перевагами АБД є те, що: дисбаланс у одній площині корекції зрівноважує один КВ; при зміні напрямку невеликого дисбалансу КВ повертається відносно точки на осі вала ротора на невеликий кут; пристрій здатний демпфірувати кутові вібрації ротора, викликані

збуреннями різного походження; у найменшому об'ємі можна досягнути найбільшої балансувальної ємності. Недоліком АБД є складність виконання карданового підвісу чи сферичного шарніру, чи значний вплив сил сухого тертя на рух КВ у випадку заключення КВ усередину сфери.

Будемо позначати розглянуті неklasичні схеми як  $H_n$ , де  $n = 1, 2, 3, 4$  - відповідно до чотирьох розглянутих неklasичних схем.

У випадку будь-якої схеми віброзахисту і зрівноваження ротора:

- 1) один АБП зрівноважує ротор у одній площині корекції і тому здатний усунути тільки статичний дисбаланс ротора;
- 2) два АБП, розташовані на деякій віддалі один від одного, зрівноважують ротор у двох площинах корекції, і тому здатні усунути його повний дисбаланс;
- 3) демпфіруючі властивості схеми можна підвищити шляхом заповнення порожнини АБП рідиною.

Наукові роботи з розробки конструкцій АБП, зокрема патенти, авторські свідоцтва тощо мають декілька спрямувань. Роботи першого спрямування відкривають нові типи АБП, другого – змінюють конструкції існуючих АБП, третього – вказують спосіб використання відомих АБП при зрівноваженні конкретних типів обертових тіл. Область застосування пасивних АБП розглянута у розділі I (табл. 1.1). Патентний огляд показує, що область застосування АБП постійно розширюється, а їх конструкція постійно удосконалюється, чи модифікується. Тому нижче виділяються найбільш загальні ознаки, які характеризують різні типи пасивних АБП з твердими КВ. Для полегшення цього процесу, під одним АБП буде розуміти пристрій для зрівноваження ротора у одній площині корекції.

За першу ознаку А приймемо схему зрівноваження і віброзахисту ротора:  $AK_n$ ,  $n = 1, 2$  – класичні схеми;  $AN_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  - неklasичні схеми.

За другу ознаку Б приймемо вид КВ, що застосовується у пристрої:  $BK_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, 6$  – класичні КВ, де  $n$  – номер КВ на рис. 1.7;  $BN_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, 12$  - неklasичні КВ, де  $n$  – номер КВ на рис. 2.7.

За третю ознаку В приймемо спосіб утворення КВ:  $V_1$  – масивне тіло;  $V_2$  – поплавок;  $V_3$  – отвори у суцільному тілі.

За четверту ознаку Г приймемо виконання, або розміщення АБП:  $G_1$  – розміщення усередині порожнистого ротора, вала, тощо;  $G_2$  – у вигляді окремої балансувальної голівки, що нагвинчується на торець вала;  $G_3$  – у вигляді насадки на вал, чи бандажа, що насаджується на ротор.

За п'яту ознаку Д приймемо заповнення АБП рідиною:  $D_1$  – рідини немає;  $D_2$  – часткове;  $D_3$  – повне.

Вище виділені основні ознаки, комбінаціями яких створюються АБП. До них можна додавати інші ознаки, які будуть уточнювати конструкції АБП (це буде зроблено при вивченні деяких окремих типів

АБП). Додатковими ознаками зокрема можуть бути: розташування маятників на валу ротора, чи на катках; відсутність чи наявність певного механізму фіксації положення КВ відносно ротора; відсутність чи наявність певного механізму примусового приведення КВ у нейтральне положення, та інші.

Виділені ознаки зібрані у табл. 2.3. При її використанні слід мати на увазі, що комбінація певних ознак неможлива.

Табл. 2.3

Основні ознаки конструкцій АБП з твердими КВ

№	Ознака	Позначення	Можливі значення
1	Схема зрівноваження і віброзахисту ротора	$AK_n$	$n = 1,2$ - за номером класичної схеми
		$АН_n$	$n = 1,2,3,4$ - за номером некласичної схеми
2	Вид КВ	$БК_n$	$n = 1,2,\dots,6$ - за номером класичного КВ на рис. 1.7
		$БН_n$	$n = 1,2,\dots,12$ - за номером некласичного КВ на рис. 2.7
3	Спосіб утворення КВ	$B_n$	$B_1$ - важке тіло; $B_2$ - поплавок; $B_3$ - отвори у суцільному тілі
4	Виконання, або розміщення АБП	$\Gamma_n$	$\Gamma_1$ - усередині порожнистого ротора, вала, тощо; $\Gamma_2$ - балансувальна голівка, що встановлюється на торець вала; $\Gamma_3$ - насадка на вал, бандаж на ротор
5	Заповнення порожнини АБП рідиною	$D_n$	$D_1$ - немає; $D_2$ - часткове; $D_3$ - повне

Домовимося ознаки, що характеризують конструкцію АБП, перелічувати за наступними правилами:

- 1) основні ознаки – по порядку із знаком “+” між ознаками, а додаткові – у кінці основних;
- 2) якщо у АБП декілька однакових КВ, що однаково встановлені, то перед ознакою КВ ставити їх кількість, якщо КВ різні, то перелічувати їх по порядку у дужках;

3) якщо АБП, що зрівноважує ротор у одній площині корекції, можна поділити на два і більше пристроїв, то ознаки кожного більш простого пристрою обмежувати дужками і додавати їх між собою.

Тоді кульовий АБП, зображений на рис. 1.12, б має будову:

$$AK_1+2BK_2+V_1+\Gamma_3+D_1.$$

На рис. 1.12, в (кульовий дворядний АБП):

$$(AK_1+mBK_2+V_1+\Gamma_3+D_1)+(AK_1+kBK_2+V_1+\Gamma_3+D_1),$$

де  $m$  - кількість куль у першому,  $k$  - другому ряду.

Некласичний АБП, зображений на рис. 2.10, ж має будову:

$$AH_3+BH_{12}+V_1+\Gamma_2+D_1.$$

На рис. 2.10, и:  $[(AH_3+BH_{12})+(AH_1+BH_{11})]+V_1+\Gamma_2+D_1.$

## 2.4. Інженерний критерій настання автобалансування

Розглянемо явище самоцентрування ротора, на основі якого були розроблені пасивні АБП. На рис. 2.11 зображений статично незрівноважений ротор, який рухається плоскопаралельно у випадку відсутності зовнішніх сил опору. На докритичних швидкостях обертання ротора вал відхиляється від осі обертання у важкий бік ротора (рис. 2.11, б), а на закритичних – у легкий (рис. 2.11, в). Тому, якщо на валу встановити пасивний АБП будь-якого типу, то його тверді КВ, чи КМ (рідина) будуть переміщуватися у той бік, що і вал. На докритичних швидкостях це призведе до збільшення дисбалансу ротора, а на закритичних – тверді КВ з часом прийдуть у те положення, у якому зрівноважать ротор, а КМ (рідина) зменшить відхилення вала від осі обертання, тобто зрівноважить ротор частково. Тому у певному наближенні можна вважати, що для настання автобалансування необхідно і достатньо, щоб частина вала, на яку буде встановлений пасивний АБП, відхилялася у бік, протилежний вектору дисбалансу.

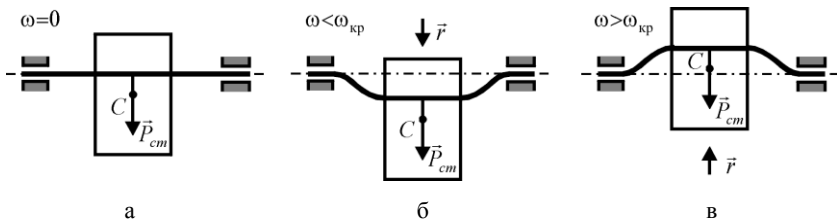


Рис. 2.11. Інженерний критерій настання автобалансування

Розглянемо гнучкий ротор, статично незрівноважений у певній поперечній площині. Силами зовнішнього опору нехтуємо. Тоді під дією дисбалансу точка на повздовжній осі ротора, у якій цей дисбаланс

прикладений, може відхилитися у бік вектору дисбалансу, або протилежно. Для усунення, чи зменшення цього дисбалансу треба встановити пасивний АБП на валу ротора так, щоб площа корекції АБП співпала з площиною дисбалансу ротора. З врахуванням попереднього прикладу природно припустити, що для настання автобалансування необхідно і достатньо щоб згадана точка на повздовжній осі ротора відхилитися протилежно вектору дисбалансу, у ній прикладеного.

Зауважимо, що процесу автобалансування заважають сили зовнішнього опору, що діють на ротор, анізотропність опор чи вала ротора і інші фактори. Завдяки ним вал не буде відхилитися строго у напрямку вектора дисбалансу, або строго у протилежний бік. Тому при визначенні умов настання автобалансування це треба враховувати.

Зроблені спостереження і зауваження дозволяють сформулювати інженерний критерій настання автобалансування, який у певному наближенні визначає необхідні і достатні умови усунення, чи зменшення одним пасивним АБП будь-якого типу відхилення повздовжньої осі ротора від осі обертання у певній площині корекції.

**Інженерний критерій настання автобалансування для одного АБП:** для усунення пасивним АБП з твердимі КВ відхилення деякої точки повздовжньої осі ротора від осі обертання, чи для зменшення цього відхилення рідинним АБП необхідно і достатньо, щоб ця точка під дією дисбалансу, у ній прикладеного, у середньому за один оберт ротора, відхиллялася протилежно вектору дисбалансу.

Математично критерій можна записати так

$$\bar{r}_{Ac} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{e}(\varphi) \cdot \bar{r}_A(\varphi) d\varphi < 0, \quad (2.15)$$

де:  $\varphi$  - кут повороту ротора;  $\bar{e}$  - одиничний вектор, спрямований по вектору дисбалансу, як функція  $\varphi$ ;  $\bar{r}_A$  - вектор відхилення точки  $A$  вала від осі обертання, викликаний статичним дисбалансом, прикладеним у точці  $A$ , як функція  $\varphi$ .

Цей же критерій, записаний через час  $t$ , має вигляд

$$\bar{r}_{Ac} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \bar{e}(t) \cdot \bar{r}_A(t) dt < 0, \quad (2.16)$$

де  $\omega$  - стала кутова швидкість обертання ротора, а  $\bar{e}, \bar{r}_A$  - ті ж вектори, що і вище, тільки як функції часу  $t$ .

Інженерний критерій автобалансування застосовується у такій послідовності:

- 1) зрівноваженому ротору надається у певній точці  $A$  на його повздовжній осі, через яку буде проходити площина корекції АБП, елементарний дисбаланс, створений елементарною масою,



- встановленою на відстані, яка значно перевищує відхилення вала від осі обертання у цієї точки;
- 2) визначається закон усталеного руху  $\vec{r}_A$  цієї точки, викликаний елементарним дисбалансом;
  - 3) із застосуванням критерію у формі (2.15), чи (2.16) визначається алгебраїчна умова настання автобалансування, яка зв'язує параметри системи і кутову швидкість обертання ротора;
  - 4) із знайденої алгебраїчної умови визначаються критичні швидкості - швидкості, при переході через які набувається чи втрачається автобалансування.

Як буде показано нижче, умови, які одержуються із застосуванням інженерного критерію, співпадають з аналогічними умовами, одержаними для конкретних типів АБП у припущенні, що маса КВ набагато менша маси ротора.

Наведений критерій не враховує тип АБП і дисбаланс, який зрівноважується. У цьому полягає як сильна, так і слабка сторона критерію. Узагальнимо критерій так, щоб він враховував тип АБП і дисбаланс, який зрівноважується.

Нехай АБП вже встановлений на ротор. Нехай відбулося автобалансування, тобто КВ чи КМ зайняли положення, у якому зрівноважують ротор, чи зменшують його дисбаланс. У цьому випадку точка А, яка знаходиться на повздовжній осі ротора у площині корекції, буде в усталеному русі рухатися за законом  $\vec{r}_A$ , який відповідає основному руху системи ротор-АБП. Нехай КВ чи КМ дещо відхиляться від основного руху, чим створять елементарний дисбаланс  $\vec{s}$ . Цей дисбаланс викличе відхилення  $\Delta\vec{r}_A$  у русі точки А від закону  $\vec{r}_A$ .

**Інженерний критерій стійкості основного руху:** *для стійкості основного руху системи ротор-АБП необхідно і достатньо, щоб точка А на повздовжній осі ротора, яка знаходиться у площині корекції АБП, під дією елементарного дисбалансу, викликаного відхиленням КВ чи КМ від основного руху, відхилялася від основного руху у середньому за один оберт ротора, протилежно вектору елементарного дисбалансу:*

$$\vec{r}_{Ac} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\epsilon}(\varphi) \cdot \Delta\vec{r}_A(\varphi) d\varphi = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \vec{\epsilon}(t) \cdot \Delta\vec{r}_A(t) dt < 0. \quad (2.17)$$

Роботи І.І.Блехмана [65], В.І.Кравченка [70], А.І.Муйжнієка [88,89], Ю.А.Невдахі [90], Г.Б.Філімоніхіна [139] і інших вчених дозволяють заключити, що якщо основний рух існує і стійкий, то побічні рухи, у яких КВ обертаються синхронно з ротором нестійкі, або не існують. Тому, при врахуванні тільки цих усталених рухів, автобалансування наступатиме тоді і тільки тоді, коли у системи ротор-АБП стійкий

основний рух. Із застосуванням цього результату побудовані дослідження багатьох авторів, зокрема Ю.В.Агафонова [177], Б.Г.Гольдштейна [178,179], А.Н.Горбенко, О.П.Радченко [66], А.Н.Горбенко [68], В.П.Нестеренка [103,104], у яких заключення про настання автобалансування робиться на підставі аналізу стійкості тільки основного руху. Якщо це прийняти до уваги, то зформульований інженерний критерій стійкості основного руху можна вважати інженерним критерієм настання автобалансування, який враховує дисбаланс ротора і тип АБП.

У першій частині монографії у подальших дослідженнях використовується інженерний критерій настання автобалансування. Це пов'язано з необхідністю визначити умови настання автобалансування, придатні для будь-якого пасивного АБП. У другій частині монографії для дослідження динаміки системи ротор-АБП використовується метод, який ґрунтується на теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем. Цей метод дозволяє дослідити більшу кількість явищ і з більшою глибиною, ніж інженерний критерій стійкості основного руху. Проте слід відзначити, що останній метод найпростішим шляхом дозволяє встановити залежність критичних швидкостей від дисбалансів, які зрівноважуються, та від маси і положення КВ.

З точки зору кінематики жорсткий ротор може рухатися:

- 1) плоскопаралельно з площиною руху, перпендикулярною до осі обертання;
- 2) навколо нерухомої точки (здійснювати сферичний рух);
- 3) поступально разом з центром мас з площиною руху, перпендикулярною до осі обертання, і обертально навколо центра мас;
- 4) поступально разом з центром мас і обертально навколо центра мас.

Для настання автобалансування необхідно, щоб ротор обертався із сталою кутовою швидкістю. Ми будемо розглядати тільки такі випадки. Будемо також вважати, що опори, чи закріплення ротора не дозволяють йому здійснювати поступальні рухи у напрямку осі обертання, тобто будемо розглядати тільки перші три випадки закріплення і руху ротора.

Будемо позначати головні центральні моменти інерції ротора таким чином [209]: осьовий момент інерції відносно поздовжньої осі (полярний) –  $C$ , відносно поперечних осей (екваторіальні) –  $A, B$ .

Ротор називається осесиметричним, якщо у нього однакові екваторіальні моменти інерції

$$A=B. \quad (2.18)$$

Нижче розглядаються тільки осесиметричні ротори.

Осесиметричні ротори з рівними полярними і екваторіальними осьовими моментами інерції, називаються сферичними:

$$A=C. \quad (2.19)$$

Осесиметричні ротори, у яких полярний осьовий момент інерції більше екваторіального, називаються короткими:

$$C > A. \quad (2.20)$$

Осесиметричні ротори, у яких полярний осьовий момент інерції менше екваторіального, називаються довгими:

$$C < A. \quad (2.21)$$

У наближеній теорії гіроскопів і лінійній теорії роторних систем прийнято приймати такі припущення [209,214,216,220,221]:

- 1) дисбаланс ротора є малою величиною;
- 2) кутові і лінійні відхилення вала ротора від осі обертання є малими величинами;
- 3) опори ротора мають лінійні пружні властивості і тому пружні сили, що діють на ротор з боку опор, пропорційні узагальненим координатам, які визначають положення ротора;
- 4) сили опору, які діють на ротор, також лінійні і пропорційні першим похідним узагальнених координат, які визначають положення ротора;
- 5) вплив сил ваги незначний і їм можна знехтувати.

Тоді у рамках зазначених теорій рух ротора описується лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь. У їх правих частинах стоять складові, що залежать від часу і викликані дисбалансом ротора і іншими збурними силами, що діють на ротор.

Зробимо наступні зауваження.

1. Для зрівноваження ротора, який здійснює плоский рух, чи для усунення відхилення осі вала від осі обертання у ротора з нерухомою точкою достатньо використовувати один АБП. Два АБП - надмірні і роблять задачу невизначеною.

2. Для повного зрівноваження жорсткого ротора, який здійснює просторовий рух, достатньо використовувати два АБП. Для настання автобалансування необхідно і достатньо, щоб умови автобалансування одночасно виконувалися для двох АБП. Теоретично можливо, що на певних швидкостях обертання ротора один АБП буде усувати відхилення вала від осі обертання у власній площині корекції, а другий - не буде. Використання трьох і більше АБП - надмірне і робить задачу невизначеною.

3. При зрівноваженні гнучких роторів можливо використання будь-якої кількості АБП. Для настання автобалансування необхідно і достатньо, щоб інженерні умови автобалансування виконувалися одночасно для всіх АБП.

З врахуванням зроблених зауважень нижче визначаються умови зрівноваження жорстких роторів одним АБП і умови зрівноваження гнучких роторів одним і більшою кількістю АБП.

## 2.5. Інженерні умови зрівноваження роторів, які здійснюють плоский рух

### 2.5.1. Ротор на анізотропних опорах

На рис. 2.12 показані схеми, що пояснюють закріплення і рух ротора. Нерухомі осі  $X, Y$  спрямовані по головним напрямкам для жорсткостей опор, причому так, що вісь  $X$  - вздовж мінімальної, а  $Y$  - максимальної жорсткості (рис. 2.11, а). Рух ротора визначаємо як суму двох рухів (рис. 2.12, б): поступального – разом з центром мас – точкою  $C$ ; обертового – навколо центра мас із сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Положення центра мас ротора визначають координати  $x, y$ . Вектор дисбалансу  $\vec{s}$  утворюється елементарною масою  $dm$ , яка у початковий момент часу знаходилася на осі  $X$ . Поточний напрям вектора дисбалансу визначається кутом  $\omega t$  між вектором і віссю  $X$ .

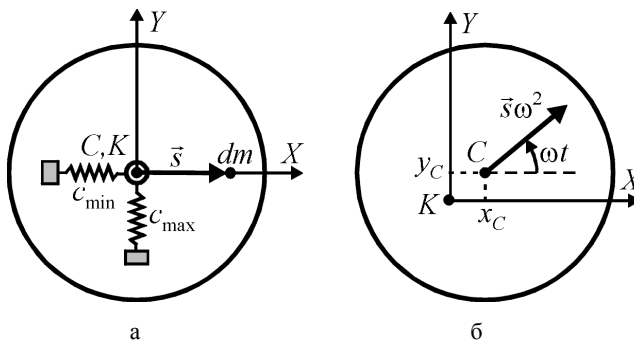


Рис. 2.12. Схема плоского ротора на анізотропних пружних опорах

Диференціальні рівняння руху ротора мають вигляд

$$M\ddot{x} + c_{\min}x = s\omega^2 \cos \omega t, \quad M\ddot{y} + c_{\max}y = s\omega^2 \sin \omega t. \quad (2.22)$$

Введемо критичні швидкості ротора

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{c_{\min}}{M}}, \quad \omega_{\max} = \sqrt{\frac{c_{\max}}{M}}. \quad (2.23)$$

Тоді рівняння (2.23) приймуть вигляд

$$\ddot{x} + \omega_{\min}^2 x = \tilde{s}\omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{y} + \omega_{\max}^2 y = \tilde{s}\omega^2 \sin \omega t, \quad (2.24)$$

де  $\tilde{s} = s/M$ ,  $\tilde{s} \ll 1$ .

Розв'язок цієї системи має декілька складових. Але за наявності навіть невеликих сил опору всі вони прямують до нуля за виключенням

частинного розв'язку цієї системи. Саме ця складова і буде визначати відхилення вала, коли рух установиться. Частинний розв'язок має вигляд

$$x = \frac{\tilde{s} \omega^2 \cos \omega t}{\omega_{\min}^2 - \omega^2}, \quad y = \frac{\tilde{s} \omega^2 \sin \omega t}{\omega_{\max}^2 - \omega^2}. \quad (2.25)$$

З частинного розв'язку видно, що самоцентрування ротора починає відбуватися: за напрямком осі  $X$  - на швидкостях, більших за  $\omega_{\min}$ ; за напрямком осі  $Y$  - на швидкостях, більших за  $\omega_{\max}$ ; повне - на швидкостях, більших за  $\omega_{\max}$ .

Застосуємо до розглядуваної системи інженерний критерій настання автобалансування. Для визначення відповідних умов введемо у розглядання одиничний вектор, спрямований у напрямку вектора дисбалансу. Тоді його проєкції на осі  $X, Y$ :

$$\epsilon_x = \cos \omega t, \quad \epsilon_y = \sin \omega t. \quad (2.26)$$

Проєкція вектора відхилення вала на напрям дисбалансу визначатиметься:

$$r_{Ce}(t) = x\epsilon_x + y\epsilon_y = \tilde{s} \omega^2 \left( \frac{\cos^2 \omega t}{\omega_{\min}^2 - \omega^2} + \frac{\sin^2 \omega t}{\omega_{\max}^2 - \omega^2} \right). \quad (2.27)$$

Вал більшу частину часу буде знаходитися з легкого боку ротора за умови, що

$$\bar{r}_{Ce} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} r_{Ce}(t) dt = \frac{\tilde{s} \omega^2 [(\omega_{\min}^2 + \omega_{\max}^2)/2 - \omega^2]}{2(\omega_{\min}^2 - \omega^2)(\omega_{\max}^2 - \omega^2)} < 0. \quad (2.28)$$

Видно, що існують три критичні швидкості, при переході через які може відбуватися, чи порушуватися автобалансування ротора:

$$\omega_1 = \omega_{\min}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_{\min}^2 + \omega_{\max}^2}{2}}, \quad \omega_3 = \omega_{\max}, \quad \omega_1 < \omega_2 < \omega_3. \quad (2.29)$$

Автобалансування може відбуватися на швидкостях між першою і другою, та над третьою критичними швидкостями:

$$\omega \in (\omega_1, \omega_2) \cup (\omega_3, +\infty). \quad (2.30)$$

Аналогічний результат для двохкульового АБП, шляхом дослідження динаміки системи ротор-АБП, раніше одержав В.П.Нестеренко [103,104,107].

Якщо опори ізотропні, то  $c_{\min} = c_{\max} = c$ , і самоцентрування і автобалансування починають відбуватися на швидкостях, більших за єдину критичну швидкість:

$$\omega > \omega_1, \quad \omega_1 = \sqrt{c/M}. \quad (2.31)$$

## 2.5.2. Ротор, пружно закріплений в АТТ, яке також пружно закріплено і рухається поступально

На рис. 2.13, а показана схема опор АТТ і ротора, та дисбалансу, а на рис. 2.13, б – схема руху.

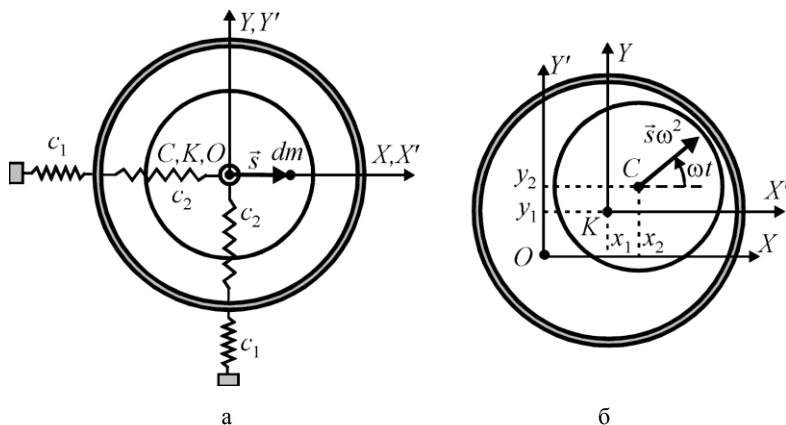


Рис. 2.13. Модель ротора з додатковим тілом

Диференціальні рівняння руху системи мають вигляд:

$$M_1 \ddot{x}_1 + c_2(x_1 - x_2) + c_1 x_1 = 0, \quad M_1 \ddot{y}_1 + c_2(y_1 - y_2) + c_1 y_1 = 0,$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = s\omega^2 \cos \omega t, \quad M_2 \ddot{y}_2 + c_2(y_2 - y_1) = s\omega^2 \sin \omega t, \quad (2.32)$$

де:  $M_1$  - маса тіла,  $M_2$  - маса ротора;  $c_1, c_2$  - жорсткості опор ротора і АТТ;  $s$  - елементарний дисбаланс.

Введемо комплексні змінні

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2. \quad (2.33)$$

Тоді система (2.32) приймає вигляд

$$M_1 \ddot{z}_1 + c_2(z_1 - z_2) + c_1 z_1 = 0, \quad M_2 \ddot{z}_2 + c_2(z_2 - z_1) = s\omega^2 e^{i\omega t}. \quad (2.34)$$

Шукаємо частинний розв'язок цієї системи у вигляді

$$z_j = D_j e^{i\omega t}, \quad / j = 1, 2 / . \quad (2.35)$$

Тоді з системи (2.35) одержуємо наступну систему алгебраїчних рівнянь для визначення  $D_j, \omega$ :

$$(c_1 + c_2 - M_1 \omega^2) D_1 - c_2 D_2 = 0, \quad -c_2 D_1 + (c_2 - M_2 \omega^2) D_2 = s\omega^2. \quad (2.36)$$

Характеристичне рівняння відповідної однорідної системи має вигляд

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - M_1\omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - M_2\omega^2 \end{vmatrix} = \\ = (c_1 + c_2 - M_1\omega^2)(c_2 - M_2\omega^2) - c_2^2 = 0. \quad (2.37)$$

або у вигляді полінома

$$\Delta(x) = a_2x^2 - a_1x + a_0, \quad x = \omega^2, \\ a_0 = c_1c_2, \quad a_1 = M_1c_2 + M_2(c_1 + c_2), \quad a_2 = M_1M_2. \quad (2.38)$$

У квадратного рівняння (2.38) два дійсних додатних кореня

$$x_{1,2} = \frac{M_1c_2 + M_2(c_1 + c_2)}{2M_1M_2} \mp \left[ \left( \frac{M_1c_2 + M_2(c_1 + c_2)}{2M_1M_2} \right)^2 - \frac{c_1c_2}{M_1M_2} \right]^{1/2}. \quad (2.39)$$

З системи (2.36) знаходимо

$$D_2 = (c_1 + c_2 - M_1\omega^2)s\omega^2 / \Delta(\omega^2). \quad (2.40)$$

Тоді прогин вала

$$z_2 = (c_1 + c_2 - M_1\omega^2)s\omega^2 e^{i\omega t} / \Delta(\omega^2). \quad (2.41)$$

Його проекція на напрям вектора дисбалансу

$$r_{2e} = (c_1 + c_2 - M_1\omega^2)s\omega^2 / \Delta(\omega^2) \quad (\vec{e} = e^{i\omega t}). \quad (2.42)$$

Оскільки проекція стала, то немає потреби у її усередненні. З умови (2.42) видно, що існують три критичні швидкості

$$\omega_1 = \sqrt{x_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{(c_1 + c_2) / M_1}, \quad \omega_3 = \sqrt{x_2} : \omega_1 < \omega_2 < \omega_3, \quad (2.43)$$

при переході через які змінюється знак у проекції. Відповідно до знаків робимо висновок, що автобалансування може відбуватися на швидкостях між першою і другою, та над третьою критичними швидкостями:

$$\omega \in (\omega_1, \omega_2) \cup (\omega_3, +\infty), \quad (2.44)$$

а на інших швидкостях не відбувається.

Аналогічний результат для двохкульового АБП, раніше одержав В.П.Нестеренко [103-105].

### 2.5.3. Ротор під час різання (шліфування)

На рис. 2.14, а показаний ротор на анізотропних пружних опорах, дисбаланс, система координат, на рис. 2.14, б – схема різання (шліфування), на рис. 2.14, в – схема деформацій пружин. Початок системи координат відповідає недеформованим пружинам. Зв'язок між тангенціальною  $T$  і нормальною  $N$  реакціями задає закон Кулона

$$T = fN, \quad (2.45)$$

де  $f$  – коефіцієнт сухого тертя.

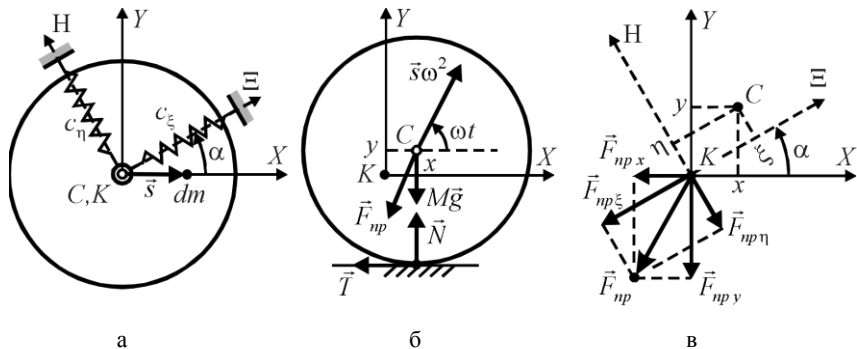


Рис. 2.14. Модель ротора під час різання (шліфування)

Диференціальні рівняння руху статично незрівноваженого ротора на анізотропних пружних опорах під час різання (шліфування) мають вигляд

$$M\ddot{x} = s\omega^2 \cos \omega t - T + F_{np x}, \quad M\ddot{y} = s\omega^2 \sin \omega t + N - Mg + F_{np y}, \quad (2.46)$$

де:  $M$  - маса ротора;  $g$  - прискорення вільного падіння;  $F_{np x}, F_{np y}$  - проекції сили пружності опор на осі  $x, y$ .

Знайдемо проекції сили пружності. З рис. 2.14, в знаходимо, що при малих переміщеннях

$$\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad \eta = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad F_{np \xi} = c_{\xi} \xi, \quad F_{np \eta} = c_{\eta} \eta,$$

$$F_{np x} = -F_{np \xi} \cos \alpha + F_{np \eta} \sin \alpha = -(c_{\xi} \cos^2 \alpha + c_{\eta} \sin^2 \alpha)x - (c_{\xi} - c_{\eta})y \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$F_{np y} = -F_{np \xi} \sin \alpha - F_{np \eta} \cos \alpha = -(c_{\xi} \sin^2 \alpha + c_{\eta} \cos^2 \alpha)y - (c_{\xi} - c_{\eta})x \sin \alpha \cos \alpha.$$

Звідки

$$F_{np x} = -c_x x - c_{xy} y, \quad F_{np y} = -c_y y - c_{xy} x,$$

$$c_x = c_{\xi} \cos^2 \alpha + c_{\eta} \sin^2 \alpha, \quad c_{xy} = (c_{\xi} - c_{\eta}) \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$c_y = c_{\xi} \sin^2 \alpha + c_{\eta} \cos^2 \alpha. \quad (2.47)$$

де  $c_x, c_y, c_{xy}$  - коефіцієнти жорсткості опор відносно осей  $x, y$ .

З врахуванням (2.47) диференціальні рівняння руху системи приймуть вигляд

$$M\ddot{x} + c_x x + c_{xy} y = s\omega^2 \cos \omega t - T,$$

$$M\ddot{y} + c_y y + c_{xy} x = s\omega^2 \sin \omega t + N - Mg. \quad (2.48)$$

Зробимо наступні припущення щодо процесу різання (шліфування):

– процес відбувається без відриву ротора від поверхні, що обробляється;



- контакт між ротором і поверхнею забезпечений сталим початковим наближенням опор до поверхні у напрямку осі  $y$ ;
- тангенціальна складова реакції поверхні  $\vec{T}$  не змінює напрямку.

Відповідно до припущень

$$N \geq 0, \quad y = y_0, \quad \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad |\dot{x}| \leq R\omega, \quad (2.49)$$

де  $R$  - радіус ротора. З врахуванням (2.45), (2.49) з рівнянь (2.48) знаходимо

$$N = c_y y_0 + c_{xy} x - s\omega^2 \sin \omega t + Mg,$$

$$M\ddot{x} + (c_x + fc_{xy})x = s\omega^2 (\cos \omega t + f \sin \omega t) - f(Mg + c_y y_0) - c_{xy} y_0. \quad (2.50)$$

Частинний розв'язок другого рівняння в (2.50) має вигляд

$$x_u = x_1 + x_2,$$

$$x_1 = -\frac{f(Mg + c_y y_0) + c_{xy} y_0}{c_x + fc_{xy}}, \quad x_2 = \frac{s\omega^2 (\cos \omega t + f \sin \omega t)}{c_x + fc_{xy} - M\omega^2}. \quad (2.51)$$

Вводимо одиничний вектор  $\vec{e}$  з (2.26), спрямований як дисбаланс. Тоді

$$r_{Ce}(t) = x_u e_x + y_0 e_y. \quad (2.52)$$

Вал більшу частину часу буде знаходитися з легкого боку ротора за умови, що

$$\begin{aligned} \bar{r}_{Ce} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} r_{Ce}(t) dt = \frac{\tilde{s}\omega^2}{2(\omega_1^2 - \omega^2)} < 0, \\ \tilde{s} &= \frac{s}{M}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{c_x + fc_{xy}}{M}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Видно, що існує одна критична швидкість  $\omega_1$ , при переході через яку починає відбуватися автобалансування. Отже, умова автобалансування

$$\omega \in (\omega_1, +\infty). \quad (2.54)$$

Одержаний результат узагальнює результати, одержані в роботах [103,104,180,181] наступним чином. По-перше, в моделі враховано, що головні напрямки жорсткостей опор можуть бути повернуті щодо поверхні, яка обробляється, на кут  $\alpha$ . По-друге, одержаний результат застосовний для будь-якого типу АБП. Також формула (2.53) уперше встановлює, що критична швидкість залежить від шорсткості поверхні, що обробляється - від параметра  $f$ .

Якщо поверхня є ідеальною в'язкою, яка примушує центр ротора рухатися по прямій, то  $f = 0$  і критична швидкість визначається за формулою

$$\omega_1 = \sqrt{c_x / M}. \quad (2.55)$$

## 2.6. Інженерні умови зрівноваження ротора з нерухомою точкою

### 2.6.1. Випадок, коли вал утримує сферичний шарнір

На рис. 2.15, а показана схема ротора та дисбалансу, а на рис. 2.15, б, в – кінематика руху системи.

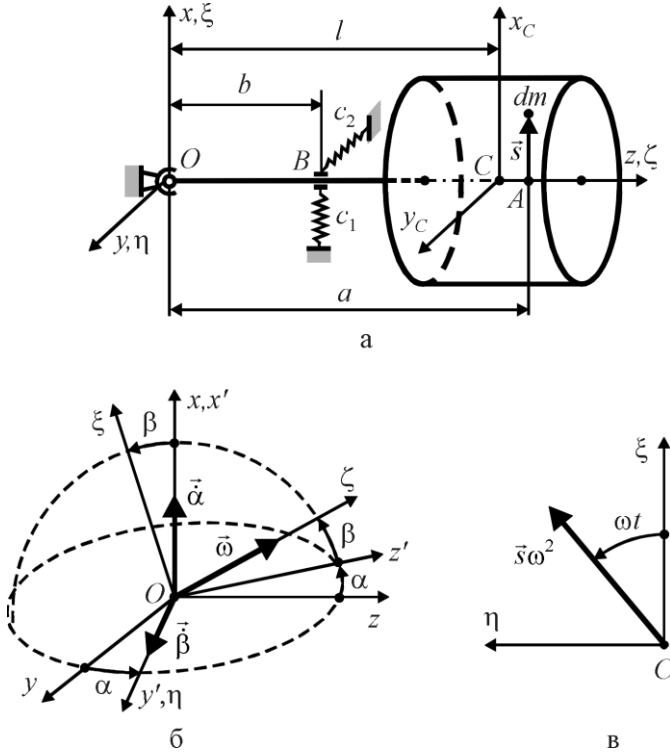


Рис. 2.15. Модель ротора з нерухомою точкою

На рисунку осі  $Oxyz$  – нерухомі, вісь  $z$  спрямована по осі вала при відсутності обертання, а осі  $x, y$  по головним напрямкам жорсткостей опор. Осьові моменти інерції ротора відносно головних центральних осей  $x_C, y_C, z$  – відповідно  $A, A, C$ . Тобто ротор осесиметричний. Положення осі симетрії ротора  $\zeta$  задається кутами Резаля  $\alpha, \beta$ . Допоміжні осі  $O\xi\eta\zeta$  одержуються з осей  $Oxyz$  після повороту на кути Резаля, як це показано на рис. 2.15, б. За теоремою Гюйгенса осьові моменти інерції ротора відносно осей  $O\xi\eta\zeta$ :

$$C_\zeta = C, \quad A_{\xi,\eta} = A + Ml^2, \quad (2.56)$$

де  $l$  – відстань від центра мас ротора до осей  $\xi, \eta$ . Тут врахована симетрія ротора, завдяки якій обертання ротора навколо осі  $\zeta$  не змінює осьові моменти інерції  $A_{\xi,\eta}$ .

Для невеликих кутів Резаля кінетичний момент ротора відносно точки  $O$ , розкладений на складові, спрямовані по координатних осях  $Oxyz$ , має вигляд [209]:

$$\vec{K}_C = \vec{i}(A_\xi \dot{\alpha} + C\dot{\phi}\beta) + \vec{j}(A_\xi \dot{\beta} - C\dot{\phi}\alpha) + \vec{k}C\dot{\phi}, \quad (2.57)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори, спрямовані відповідно по координатним осям  $x, y, z$ . Тоді теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної системи відносно осей  $x, y$  дає такі два диференціальні рівняння руху ротора:

$$A_\xi \ddot{\alpha} + C\omega \dot{\beta} = M_x^{(30\theta)}, \quad A_\xi \ddot{\beta} - C\omega \dot{\alpha} = M_y^{(30\theta)}, \quad (2.58)$$

де  $M_x^{(30\theta)}, M_y^{(30\theta)}$  – головні моменти зовнішніх сил, діючих на ротор, знайдені відносно центральних осей  $x, y$ . Через малість дисбалансу вважаємо, що він майже не впливає на масу і осьові моменти інерції ротора. Вважаємо, що його дія проявляється тільки через відцентрові сили інерції.

Зовнішні сили і моменти, що діють на ротор, утворюються пружними силами і відцентровою силою від дисбалансу. При малих кутах Резаля проекції на нерухомі осі складових сил і моментів, викликаних дисбалансом, наближено визначаються так:

$$F_{Ax}^{(s)} = s\omega^2 \cos \omega t, \quad F_{Ay}^{(s)} = s\omega^2 \sin \omega t,$$

$$M_x^{(s)} = -F_{Ay}^{(s)} z_A = -sa\omega^2 \sin \omega t, \quad M_y^{(s)} = F_{Ax}^{(s)} a = sa\omega^2 \cos \omega t. \quad (2.59)$$

При малих кутах Резаля проекції на нерухомі осі складових, викликаних силами пружності, наближено визначаються так:

$$F_{Bx}^{(c)} = -c_1 b \beta, \quad F_{By}^{(c)} = c_2 b \alpha, \quad M_x^{(c)} = -c_2 b^2 \alpha, \quad M_y^{(c)} = -c_1 b^2 \beta. \quad (2.60)$$

Звідки знаходимо

$$\begin{aligned} M_x^{(30\theta)} &= M_x^{(s)} + M_x^{(c)} = -sa\omega^2 \sin \omega t - c_2 b^2 \alpha, \\ M_y^{(30\theta)} &= M_y^{(s)} + M_y^{(c)} = sa\omega^2 \cos \omega t - c_1 b^2 \beta. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Підставляючи це в (2.59), одержуємо наступні диференціальні рівняння руху системи

$$A_\xi \ddot{\alpha} + C\omega \dot{\beta} + c_2 b^2 \alpha = -sa\omega^2 \sin \omega t, \quad A_\xi \ddot{\beta} - C\omega \dot{\alpha} + c_1 b^2 \beta = sa\omega^2 \cos \omega t. \quad (2.62)$$

Введемо такі позначення

$$k_1 = c_2 b^2, \quad k_2 = c_1 b^2, \quad \tilde{s} = sa, \quad (2.63)$$

де  $k_{1,2}$  - узагальнені жорсткості опор, які введені для того, щоб була можливість використовувати результати цих досліджень при іншій конструкції пружних опор. Остаточно одержуємо такі диференціальні рівняння руху системи

$$A_{\xi}\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + k_1\alpha = -\tilde{s}\omega^2 \sin \omega t, \quad A_{\xi}\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + k_2\beta = \tilde{s}\omega^2 \cos \omega t. \quad (2.64)$$

Шукаємо частинний розв'язок останньої системи у вигляді

$$\alpha = D_{\alpha} \sin \omega t, \quad \beta = D_{\beta} \cos \omega t. \quad (2.65)$$

Підстановка (2.65) у (2.64) дає наступну систему алгебраїчних рівнянь для визначення  $D_{\alpha}, D_{\beta}, \omega$ :

$$(k_1 - A_{\xi}\omega^2)D_{\alpha} - C\omega^2 D_{\beta} = -\tilde{s}\omega^2, \quad -C\omega^2 D_{\alpha} + (k_2 - A_{\xi}\omega^2)D_{\beta} = \tilde{s}\omega^2. \quad (2.66)$$

Дискримінант однорідної системи:

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} k_1 - A_{\xi}\omega^2 & -C\omega^2 \\ -C\omega^2 & k_2 - A_{\xi}\omega^2 \end{vmatrix} = (k_1 - A_{\xi}\omega^2)(k_2 - A_{\xi}\omega^2) - C^2\omega^4, \quad (2.67)$$

Розв'язок системи (2.66) має вигляд

$$D_{\alpha} = \frac{[(C + A_{\xi})\omega^2 - k_2] \tilde{s}\omega^2}{\Delta(\omega^2)}, \quad D_{\beta} = -\frac{[(C + A_{\xi})\omega^2 - k_1] \tilde{s}\omega^2}{\Delta(\omega^2)}. \quad (2.68)$$

Тоді частинний розв'язок (2.65) приймає вигляд

$$\alpha = \frac{[(C + A_{\xi})\omega^2 - k_2] \tilde{s}\omega^2 \sin \omega t}{\Delta(\omega^2)}, \quad \beta = -\frac{[(C + A_{\xi})\omega^2 - k_1] \tilde{s}\omega^2 \cos \omega t}{\Delta(\omega^2)}. \quad (2.69)$$

Переміщення точки  $A$  через проекції на осі  $x, y$  у визначається так:

$$x_A = \beta a = -\frac{[(C + A_{\xi})\omega^2 - k_1] \tilde{s} a \omega^2 \cos \omega t}{\Delta(\omega^2)},$$

$$y_A = -\alpha z_A = -\frac{[(C + A_{\xi})\omega^2 - k_2] \tilde{s} a \omega^2 \sin \omega t}{\Delta(\omega^2)}. \quad (2.70)$$

Проекції на осі  $x, y$  одиничного вектора, спрямованого у напрямку вектора дисбалансу:

$$e_x = \cos \omega t, \quad e_y = \sin \omega t. \quad (2.71)$$

Проекція вектора відхилення вала на напрям дисбалансу визначатиметься:

$$r_{Ae}(t) = x_A e_x + y_A e_y = -\frac{\tilde{s} a \omega^2}{\Delta(\omega^2)} [(C + A_{\xi})\omega^2 - k_1 \cos^2 \omega t - k_2 \sin^2 \omega t]. \quad (2.72)$$

Вал більшу частину часу буде знаходитися з легкого боку ротора за умови, що

$$\bar{r}_{A\xi} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} r_{A\xi}(t) dt = -\frac{\tilde{s} a \omega^2 [2(C + A_\xi) \omega^2 - (k_1 + k_2)]}{2\Delta(\omega^2)} < 0. \quad (2.73)$$

Введемо у розглядання критичну швидкість

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{2(C + A_\xi)}}. \quad (2.74)$$

Тоді умова (2.73) приймає вигляд

$$\bar{r}_{A\xi} = -\frac{\tilde{s} a \omega^2 (C + A_\xi) (\omega^2 - \tilde{\omega}^2)}{\Delta(\omega^2)} < 0. \quad (2.75)$$

У випадку малих швидкостей обертання ротора

$$\omega^2 \sim 0: \Delta(\omega^2) \sim k_1 k_2, \quad \bar{r}_{A\xi} \sim -\frac{\tilde{s} a \omega^2 (C + A_\xi) \tilde{\omega}^2}{k_1 k_2} > 0, \quad (2.76)$$

і автобалансування не відбуватиметься. У випадку, коли ротор швидко обертається

$$\omega^2 \gg 1: \Delta(\omega^2) \sim (A_\xi^2 - C^2) \omega^4, \quad \bar{r}_{A\xi} \sim -\frac{\tilde{s} a}{A_\xi - C}, \quad (2.77)$$

і автобалансування відбуватиметься тільки для довгих відносно точки  $O$  роторів  $A_\xi > C$ .

Розглянемо випадки різних роторів докладніше. Подамо характеристичне рівняння (2.67) у вигляді

$$\Delta(x) = a_2 x^2 - a_1 x + a_0, \quad x = \omega^2, \quad (2.78)$$

$$a_0 = k_1 k_2, \quad a_1 = A_\xi (k_1 + k_2), \quad a_2 = A_\xi^2 - C^2.$$

Дискримінант квадратного рівняння

$$D = a_1^2 - 4a_0 a_2 = A_\xi^2 (k_1 + k_2)^2 - 4k_1 k_2 (A_\xi^2 - C^2), \quad (2.79)$$

$$D = A_\xi^2 (k_1 - k_2)^2 + 4k_1 k_2 C^2 > 0.$$

З додатності дискримінанта випливає, що у квадратного рівняння (2.78) два дійсних кореня:

$$x_{1,2} = \frac{A_\xi (k_1 + k_2)}{2(A_\xi^2 - C^2)} \mp \left\{ \left[ \frac{A_\xi (k_1 + k_2)}{2(A_\xi^2 - C^2)} \right]^2 - \frac{k_1 k_2}{A_\xi^2 - C^2} \right\}^{1/2}. \quad (2.80)$$

Ці корені будуть додатними за умови, що  $a_j > 0$ ,  $/j=1,2,3/$ . Розглядаємо можливі випадки.

1) Довгий відносно точки  $O$  ротор  $A_\xi > C$ . Нехай опори анізотропні  $k_1 \neq k_2$ . Оскільки  $a_j > 0$ , то у квадратного рівняння (2.78) два додатних

дійсних кореня із (2.80). Подамо характеристичне рівняння (2.67) у вигляді

$$\Delta(\omega^2) = \frac{[k_1 + k_2 - 2(A_\xi + C)\omega^2][k_1 + k_2 - 2(A_\xi - C)\omega^2] - (k_2 - k_1)^2}{4}, \quad (2.81)$$

Введемо кутові швидкості  $\omega_{01}, \omega_{02}$ :

$$\omega_{10}^2 = \frac{k_1 + k_2}{2(A_\xi + C)}, \quad \omega_{20}^2 = \frac{k_1 + k_2}{2(A_\xi - C)}, \quad \omega_{01} < \omega_{02}, \quad \omega_{01} = \tilde{\omega}. \quad (2.82)$$

Розглянемо

$$\Delta(0) = k_1 k_2 > 0, \quad \Delta(\omega_{j0}^2) = -(k_2 - k_1)^2 / 4 < 0. \quad (2.83)$$

Враховуючи це і (2.77), робимо висновок, що корені (2.80) задовольняють такі нерівності

$$x_1 < \omega_{10}^2 < \omega_{20}^2 < x_2. \quad (2.84)$$

Введемо у розглядання три критичні швидкості

$$\omega_1 = \sqrt{x_1}, \quad \omega_2 = \omega_{01} = \tilde{\omega}, \quad \omega_3 = \sqrt{x_2} \quad (\omega_1 < \omega_2 < \omega_3). \quad (2.85)$$

Тоді умова (2.75) приводиться до такого вигляду

$$\bar{r}_{Ac} = -\frac{\tilde{s}a\omega^2}{A_\xi - C} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)} < 0. \quad (2.86)$$

У випадку анізотропних опор  $\omega_1 \neq \omega_2$  і умова (2.86) дає такі області автобалансування

$$\omega \in (\omega_1, \omega_2) \cup (\omega_3, +\infty), \quad (2.87)$$

тобто автобалансування відбуватиметься між першою і другою, та над третьою критичними швидкостями, а на решті швидкостей – відбуватися не буде.

2) Сферичний відносно точки  $O$  ротор  $A_\xi = C$ . Тоді рівняння (2.78) виводжується у лінійне

$$-A_\xi(k_1 + k_2)x + k_1 k_2 = 0,$$

яке дає єдиний дійсний додатний корінь і відповідну критичну швидкість

$$x_1 = \frac{k_1 k_2}{A_\xi(k_1 + k_2)}, \quad \omega_1 = \sqrt{x_1}. \quad (2.88)$$

Вводимо другу критичну швидкість

$$\omega_2 = \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{4A_\xi}}. \quad (2.89)$$

Розглянемо

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{4A_\xi} - \frac{k_1 k_2}{A_\xi(k_1 + k_2)} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4A_\xi(k_1 + k_2)} > 0.$$

Отже,  $\omega_2 > \omega_1$ . Умова (2.75) зводиться до такого вигляду

$$\bar{r}_{Ac} = \frac{2\tilde{s}a\omega^2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega^2 - \omega_1^2} < 0. \quad (2.90)$$

У випадку анізотропних опор  $\omega_1 \neq \omega_2$  і умова (2.90) дає таку область автобалансування

$$\omega \in (\omega_1, \omega_2), \quad (2.91)$$

тобто автобалансування відбуватиметься між першою і другою критичними швидкостями, а на решті швидкостей – відбуватися не буде.

3) Короткий відносно точки  $O$  ротор  $A_\xi < C$ . У квадратного рівняння (2.78) один додатний і один від'ємний дійсний корінь

$$x_1 = \left\{ \left[ \frac{A_\xi(k_1 + k_2)}{2(C^2 - A_\xi^2)} \right]^2 + \frac{k_1 k_2}{C^2 - A_\xi^2} \right\}^{1/2} - \frac{A_\xi(k_1 + k_2)}{2(C^2 - A_\xi^2)} > 0,$$

$$x_2 = - \left\{ \left[ \frac{A_\xi(k_1 + k_2)}{2(C^2 - A_\xi^2)} \right]^2 + \frac{k_1 k_2}{C^2 - A_\xi^2} \right\}^{1/2} - \frac{A_\xi(k_1 + k_2)}{2(C^2 - A_\xi^2)} < 0. \quad (2.92)$$

Введемо у розглядання критичні швидкості  $\omega_1, \omega_2$  і параметр  $\omega_3$ :

$$\omega_1 = \sqrt{x_1}, \quad \omega_2 = \tilde{\omega} = \omega_{01}, \quad \omega_3 = \sqrt{-x_2}. \quad (2.93)$$

З (2.85) випливає, що  $\omega_1 < \omega_2$ . Подамо умову (2.75) у вигляді

$$\bar{r}_{Ac} = \frac{\tilde{s}a\omega^2}{C - A_\xi} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 + \omega_3^2)} < 0. \quad (2.94)$$

У випадку анізотропних опор  $\omega_1 \neq \omega_2$  і умова (2.94) дає таку область автобалансування

$$\omega \in (\omega_1, \omega_2), \quad (2.95)$$

тобто автобалансування відбуватиметься між першою і другою критичними швидкостями, а на решті швидкостей – відбуватися не буде.

Розглянемо випадок ізотропних опор  $k_1 = k_2 = k$ .

1) Довгий відносно точки  $O$  ротор  $A_\xi > C$ . З рівностей (2.81), (2.82) випливає, що:

$$\Delta(\omega^2) = (A_\xi^2 - C^2)(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2),$$

$$\omega_{10}^2 = \frac{k}{A_\xi + C}, \quad \omega_{20}^2 = \frac{k}{A_\xi - C}, \quad \omega_{01} < \omega_{02}, \quad \tilde{\omega} = \omega_{01}. \quad (2.96)$$

Тоді умова автобалансування (2.75) зводиться до вигляду

$$\bar{r}_{Ac} = -\frac{\tilde{s}a\omega^2}{A_\xi - C} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_{02}^2} < 0. \quad (2.97)$$

Отже, існує тільки одна критична швидкість

$$\omega_1 = \omega_{02} = \sqrt{\frac{k}{A_\xi - C}}, \quad (2.98)$$

при перевищенні якої почне відбуватися автобалансування. Їй відповідає така область автобалансування

$$\omega \in (\omega_1, +\infty). \quad (2.99)$$

2) Сферичний відносно точки  $O$  ротор  $A_\xi = C$ . З (2.88), (2.89) видно, що

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2A_\xi}}. \quad (2.100)$$

Тому умова автобалансування (2.75) приймає вигляд

$$\bar{r}_{Ac} = \frac{\tilde{s}a\omega^2}{k} < 0. \quad (2.101)$$

Видно, що не існує швидкостей, для яких ця умова виконується. Отже, автобалансування наступати не буде.

3) Короткий відносно точки  $O$  ротор  $A_\xi < C$ . З рівностей (2.81), (2.82) випливає, що:

$$\Delta(\omega^2) = (A_\xi^2 - C^2)(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 + \omega_{02}^2),$$

$$\omega_{10}^2 = \frac{k}{A_\xi + C}, \quad \omega_{20}^2 = \frac{k}{C - A_\xi}, \quad \tilde{\omega} = \omega_{01}. \quad (2.102)$$

Тоді умова автобалансування (2.75) зводиться до вигляду

$$\bar{r}_{Ac} = \frac{\tilde{s}a\omega^2}{C - A_\xi} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \omega_{02}^2} < 0. \quad (2.103)$$

Видно, що не існує швидкостей, для яких ця умова виконується. Отже, автобалансування наступати не буде.

Аналогічний результат для двохкульового АБП частково був одержаний в роботах В.П.Нестеренка [103,104]. Але області автобалансування дещо відрізняються, бо гіроскопічний момент не був представлений через кутову швидкість. Тому вирази для критичних швидкостей містять цей момент  $H = C\omega$ , тобто подані у неявному вигляді.



## 2.6.2. Випадок, коли вал утримує циліндричний шарнір

На рис. 2.16, а показана схема ротора, та дисбалансу, а на рис. 2.16, б, в – кінематика руху системи.

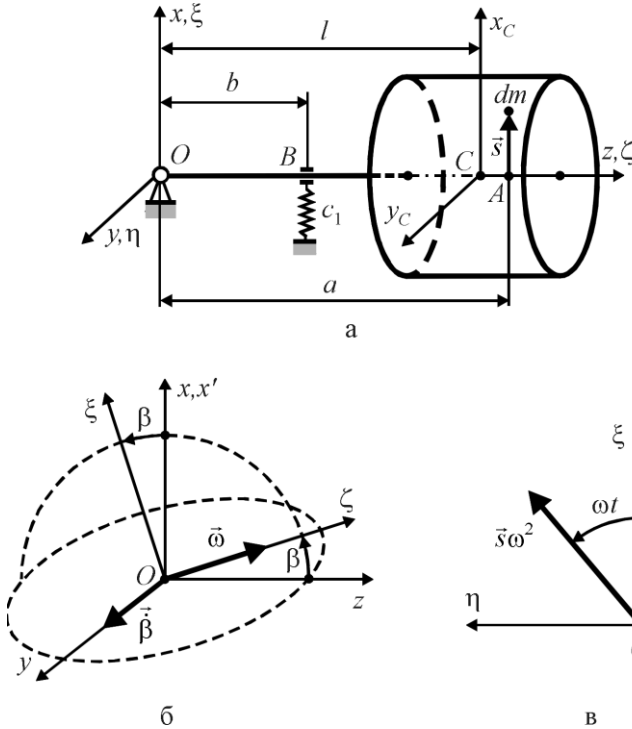


Рис. 2.16. Модель ротора з нерухомою точкою, коли вал утримує циліндричний шарнір

Осі  $Oxuz$  - нерухомі, вісь  $z$  спрямована по осі вала при відсутності обертання, вісь  $y$  - по осі циліндричного шарніру, а вісь  $x$ , - так, що система осей - права. Осьові моменти інерції ротора відносно головних центральних осей  $x_C, y_C, z$  - відповідно  $A, A, C$ . Тобто ротор осесиметричний. Положення осі симетрії ротора  $\zeta$  задається кутом  $\beta$ . Допоміжні осі  $O\xi\eta\zeta$  одержуються з осей  $Oxuz$  після повороту на кут  $\beta$ , як це показано на рис. 2.16, б. Диференціальне рівняння руху ротора одержуємо з другого рівняння системи (2.62), поклавши  $\dot{\alpha} = 0$ :

$$A_\xi \ddot{\beta} + c_1 b^2 \beta = sa\omega^2 \cos \omega t. \quad (2.104)$$

Введемо позначення

$$\omega_1 = \sqrt{c_1 b^2 / A_\xi}, \quad \tilde{s} = sa / A_\xi. \quad (2.105)$$

Тоді диференціальне рівняння (2.104) зводиться до вигляду

$$\ddot{\beta} + \omega_1^2 \beta = \tilde{s} \omega^2 \cos \omega t. \quad (2.106)$$

Частинний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\beta = \frac{\tilde{s} \omega^2 \cos \omega t}{\omega_1^2 - \omega^2}. \quad (2.107)$$

З рис. 2.16 знаходимо координати переміщення точки  $A$ :

$$y_A = 0, \quad x_A = a\beta = \frac{a\tilde{s}\omega^2 \cos \omega t}{\omega_1^2 - \omega^2}. \quad (2.108)$$

Тоді

$$r_{Ae} = x_A e_x + y_A e_y = \frac{a\tilde{s}\omega^2 \cos^2 \omega t}{\omega_1^2 - \omega^2}, \quad (2.109)$$

і інженерний критерій настання автобалансування дає умову

$$\bar{r}_{Ae} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} r_{Ae}(t) dt = \frac{a\tilde{s}\omega^2}{2(\omega_1^2 - \omega^2)} < 0. \quad (2.110)$$

З умови видно, що існує єдина критична швидкість  $\omega_1$  при перевищенні якої настає автобалансування. Зауважимо, що цей результат одержаний уперше.

## 2.7. Інженерні умови зрівноваження ротора при просторовому русі

### 2.7.1. Диференціальні рівняння руху

На рис. 2.17 наведена схема, що пояснює спосіб визначення руху ротора на жорсткому невагомому валі і пружних опорах. На рис. 2.17, а показано початкове положення ротора. Для опису руху ротора використовуємо нерухому прямокутну систему координат  $Kxyz$ , таку, що вісь  $z$  спрямована по осі обертання, вісь  $x$  спрямована у бік вектора дисбалансу у початковий момент часу, а вісь  $y$  спрямована так, що система координат – права (рис. 2.17, а). Координати  $x, y$  задають поступальний рух ротора разом з центром мас – точкою  $C$ , яка співпадає з точкою  $K$  при невідхиленому валі (рис. 2.17, б). Кути Резаля  $\alpha, \beta$  визначають поворот вала ротора навколо точки  $C$  (рис. 2.17, в). Вважаємо, що ротор обертається навколо осі вала із сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Тоді кут повороту ротора навколо осі вала  $\varphi$ :

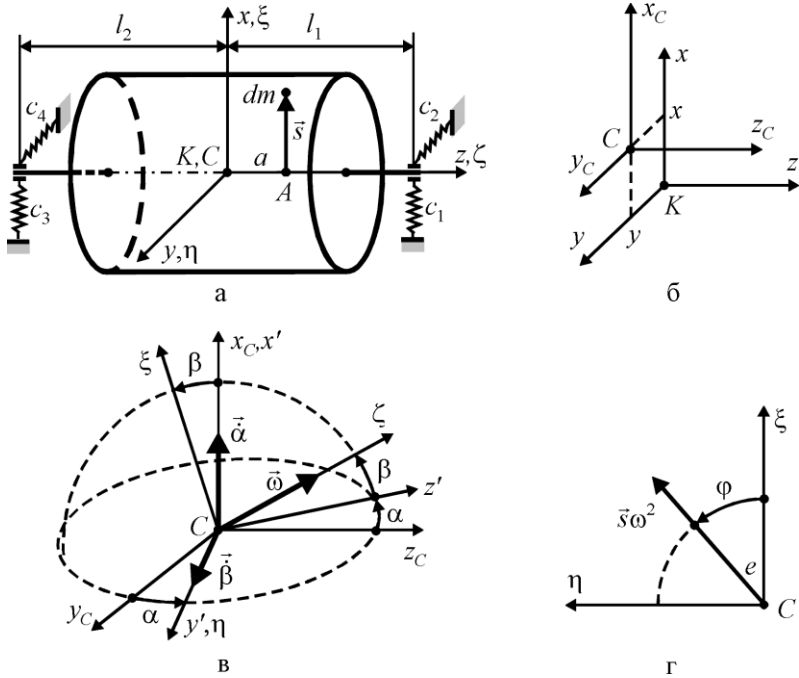


Рис. 2.17. Модель ротора на жорсткому валі і пружних опорах

$$\varphi = \omega t, \quad (2.111)$$

де  $t$  - час.

Першу групу диференціальних рівнянь руху ротора дає теорема про рух центра мас

$$M\ddot{x} = R_x^{(30\theta)}, \quad M\ddot{y} = R_y^{(30\theta)}, \quad (2.112)$$

де:  $M$  – маса ротора;  $R_x^{(30\theta)}, R_y^{(30\theta)}$  – проекції головного вектора зовнішніх сил на осі  $x, y$ .

При невеликих кутових поворотах вала кінетичний момент ротора, знайдений відносно центра мас ротора, і розкладений на складові, спрямовані по осям  $Cx_Cy_Cz_C$ , має вигляд:

$$\vec{K}_C = \vec{i}(A\dot{\alpha} + C\dot{\phi}\beta) + \vec{j}(A\dot{\beta} - C\dot{\phi}\alpha) + \vec{k}C\dot{\phi}, \quad (2.113)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори, спрямовані відповідно по координатним осям  $x_C, y_C, z_C$ . Тоді теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної системи відносно її центра мас дає такі два диференціальні рівняння:

$$A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} = M_{x_c}^{(3\omega\theta)}, \quad A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} = M_{y_c}^{(3\omega\theta)}, \quad (2.114)$$

де  $M_{x_c}^{(3\omega\theta)}, M_{y_c}^{(3\omega\theta)}$  - головні моменти зовнішніх сил, діючих на ротор, знайдені відносно центральних осей  $x_c, y_c$ . Через малість дисбалансу вважаємо, що він майже не впливає на масу і осьові моменти інерції ротора. Вважаємо, що його дія проявляється тільки через відцентрові сили інерції. Тоді головні моменти зовнішніх сил можна визначати відносно точки  $C$ , яка знаходиться на валу ротора. Зовнішні сили і моменти утворюються дисбалансом і пружними силами, що діють на вал ротора:

$$\begin{aligned} R_x^{(3\omega\theta)} &= R_x^{(s)} + R_x^{(c)}, & R_y^{(3\omega\theta)} &= R_y^{(s)} + R_y^{(c)}, \\ M_{x_c}^{(3\omega\theta)} &= M_{x_c}^{(s)} + M_{x_c}^{(c)}, & M_{y_c}^{(3\omega\theta)} &= M_{y_c}^{(s)} + M_{y_c}^{(c)}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Проекції на нерухомі осі складових, викликаних дисбалансом

$$\begin{aligned} R_x^{(s)} &= s\omega^2 \cos \omega t, & R_y^{(s)} &= s\omega^2 \sin \omega t, \\ M_{x_c}^{(s)} &= -sa\omega^2 \sin \omega t, & M_{y_c}^{(s)} &= sa\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Оскільки положення вала цілком визначається чотирма узагальненими координатами  $x, y, \alpha, \beta$ , то і проекції головного вектора і головного моменту пружних сил є функціями цих координат. Оскільки на вал діють лінійні пружні сили і відхилення вала незначні, то проекції головного вектора і головного моменту є лінійними функціями цих координат:

$$\begin{aligned} R_x^{(c)} &= -k_{11}x - k_{12}y - k_{13}\alpha - k_{14}\beta, & R_y^{(c)} &= -k_{12}x - k_{22}y - k_{23}\alpha - k_{24}\beta, \\ M_{x_c}^{(c)} &= -k_{13}x - k_{23}y - k_{33}\alpha - k_{34}\beta, & M_{y_c}^{(c)} &= -k_{14}x - k_{24}y - k_{34}\alpha - k_{44}\beta, \end{aligned} \quad (2.117)$$

де  $k_{ij}$  - коефіцієнти жорсткості, що залежать від способу пружного закріплення ротора. В найбільш загальному випадку всі коефіцієнти не дорівнюють нулю. При цьому одинична узагальнена сила, спрямована вздовж однієї будь-якої узагальненої координати, викликає зміну решти узагальнених координат. Такий випадок можливий, наприклад тоді, коли ліва і права опори анізотропні, причому головні напрямки лівої опори не співпадають з головними напрямками правої опори.

З врахуванням (2.115)-(2.117) диференціальні рівняння руху ротора приймають вигляд:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + k_{11}x + k_{12}y + k_{13}\alpha + k_{14}\beta &= s\omega^2 \cos \omega t, \\ M\ddot{y} + k_{12}x + k_{22}y + k_{23}\alpha + k_{24}\beta &= s\omega^2 \sin \omega t, \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + k_{13}x + k_{23}y + k_{33}\alpha + k_{34}\beta &= -sa\omega^2 \sin \omega t, \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + k_{14}x + k_{24}y + k_{34}\alpha + k_{44}\beta &= sa\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Для розглядуваного ротора головні напрямки жорсткостей лівої опори співпадають з головними напрямками жорсткостей правої опори. Тому диференціальні рівняння руху ротора спрощуються до вигляду

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + c_{11}x + c_{14}\beta &= s\omega^2 \cos \omega t, & M\ddot{y} + c_{22}y - c_{23}\alpha &= s\omega^2 \sin \omega t, \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + c_{33}\alpha - c_{23}y &= -s\omega^2 \sin \omega t, \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + c_{44}\beta + c_{14}x &= s\omega^2 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (2.119)$$

де коефіцієнти  $c_{ij}$  наведені у табл. 2.4. Будемо називати цей випадок - ротор на анізотропних пружних опорах з однаковими головними напрямками.

Коли  $c_{14} = c_{23} = 0$ , зв'язок між узагальненими координатами зникає і диференціальні рівняння руху (2.119) спрощуються до вигляду

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + c_{11}x &= s\omega^2 \cos \omega t, & M\ddot{y} + c_{22}y &= s\omega^2 \sin \omega t, \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + c_{33}\alpha &= -s\omega^2 \sin \omega t, & A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + c_{44}\beta &= s\omega^2 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (2.120)$$

Будемо називати цей випадок - ротор симетрично встановлений на анізотропні опори з однаковими головними напрямками.

Якщо опори ізотропні, то

$$c_{22} = c_{11}, \quad c_{44} = c_{33}, \quad c_{23} = c_{14}, \quad (2.121)$$

і диференціальні рівняння руху ротора (2.119) спрощуються до вигляду

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + c_{11}x + c_{14}\beta &= s\omega^2 \cos \omega t, & M\ddot{y} + c_{11}y - c_{14}\alpha &= s\omega^2 \sin \omega t, \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + c_{33}\alpha - c_{14}y &= -s\omega^2 \sin \omega t, \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + c_{33}\beta + c_{14}x &= s\omega^2 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (2.122)$$

Будемо називати цей випадок - ротор на ізотропних опорах.

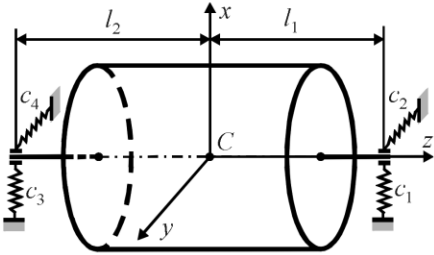
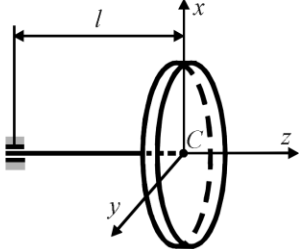
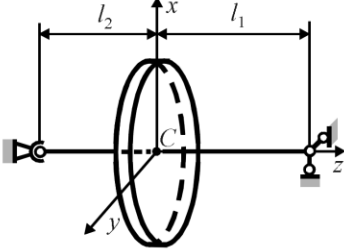
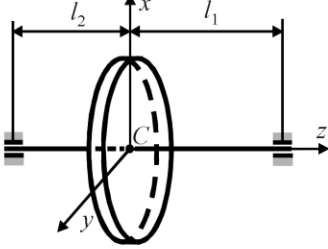
Розглянемо ротор, насаджений на гнучкий невагомий вал однакової жорсткості на згин (рис.2.18). Ротор обертається навколо нерухомої осі  $z$  із сталою кутовою швидкістю  $\omega$ , і його послідовність рухів наступна:

- 1) ротор повертається навколо осі обертання на кут  $\varphi = \omega t$  (рис. 2.18, б);
- 2) ротор відхиляється поступально на  $x$ ,  $y$  (рис. 2.18, б);
- 3) ротор повертається навколо центра мас на кути Резаля  $\alpha$ ,  $\beta$  (рис. 2.18, в).

У табл. 2.4 наведені коефіцієнти жорсткості при різному пружному закріпленні жорсткого ротора на гнучкому валі однакової жорсткості на згин. В цих позначеннях, незалежно від способу пружного закріплення ротора, диференціальні рівняння руху мають вигляд (2.122) [209,214,216,220,221].

Табл. 2.4.

Коефіцієнти жорсткості при різних способах закріплення ротора

№ п.п.	Схема пружного закріплення ротора	Коефіцієнти жорсткості
1		$c_{11} = c_1 + c_3,$ $c_{14} = c_1 l_1 - c_3 l_2,$ $c_{22} = c_2 + c_4,$ $c_{23} = c_2 l_1 - c_4 l_2,$ $c_{33} = c_2 l_1^2 + c_4 l_2^2,$ $c_{44} = c_1 l_1^2 + c_3 l_2^2.$
2		$c_{11} = \frac{12EJ}{l^3},$ $c_{14} = \frac{6EJ}{l^2},$ $c_{33} = \frac{4EJ}{l}.$
3		$c_{11} = \frac{3EJ(l_1^3 + l_2^3)}{l_1^3 l_2^3},$ $c_{14} = \frac{3EJ(l_2^2 - l_1^2)}{l_1^2 l_2^2},$ $c_{33} = \frac{3EJ(l_1 + l_2)}{l_1 l_2}.$
4		$c_{11} = \frac{12EJ(l_1^3 + l_2^3)}{l_1^3 l_2^3},$ $c_{14} = \frac{6EJ(l_2^2 - l_1^2)}{l_1^2 l_2^2},$ $c_{33} = \frac{6EJ(l_1 + l_2)}{l_1 l_2}.$

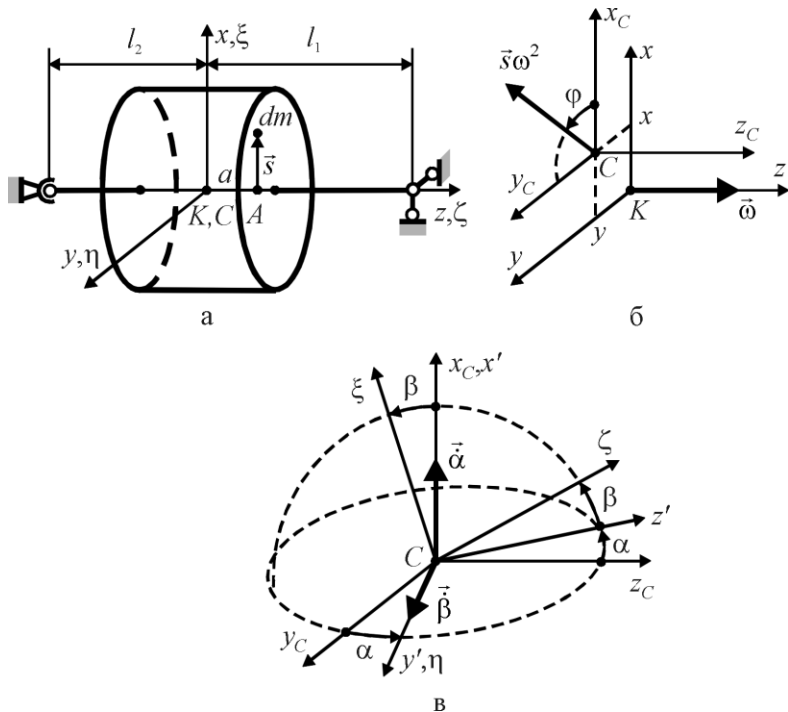


Рис. 2.18. Визначення руху ротора на гнучкому валі

### 2.7.2. Ротор несиметрично встановлений на ізотропні опори

Диференціальні рівняння руху мають вигляд (2.122). Вводимо комплексні змінні

$$z = x + iy, \quad \vartheta = \alpha + i\beta. \quad (2.123)$$

Тоді рівняння (2.122) зводяться до вигляду

$$M\ddot{z} + c_{11}z - ic_{14}\vartheta = s\omega^2 e^{i\omega t}, \quad A\ddot{\vartheta} - iC\omega\dot{\vartheta} + c_{33}\vartheta + ic_{14}z = isa\omega^2 e^{i\omega t}. \quad (2.124)$$

Шукаємо частинний розв'язок системи (2.124) у вигляді

$$z = D_z e^{i\omega t}, \quad \vartheta = D_\vartheta e^{i\omega t}. \quad (2.125)$$

Одержуємо такі алгебраїчні рівняння для визначення  $D_z, D_\vartheta, \omega$ :

$$(c_{11} - M\omega^2)D_z - ic_{14}D_\vartheta = s\omega^2, \quad ic_{14}D_z + [c_{33} - (A - C)\omega^2]D_\vartheta = isa\omega^2. \quad (2.126)$$

Розв'язком цієї системи є

$$D_z = [c_{33} - (A - C)\omega^2 - c_{14}a] \frac{s\omega^2}{\Delta(\omega^2)}, \quad D_\vartheta = [(c_{11} - M\omega^2)a - c_{14}] \frac{isa\omega^2}{\Delta(\omega^2)}. \quad (2.127)$$

де  $\Delta(\omega^2)$  - характеристичне рівняння системи (2.127):

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - M\omega^2 & -ic_{14} \\ ic_{14} & c_{33} - \omega^2(A - C) \end{vmatrix} = \\ = [c_{11} - M\omega^2][c_{33} - \omega^2(A - C)] - c_{14}^2 = 0. \quad (2.128)$$

Тоді частинний розв'язок (2.125) приймає вигляд

$$z = [c_{33} - (A - C)\omega^2 - c_{14}a] \frac{s\omega^2}{\Delta(\omega^2)} e^{i\omega t}, \\ \vartheta = [(c_{11} - M\omega^2)a - c_{14}] \frac{is\omega^2}{\Delta(\omega^2)} e^{i\omega t}. \quad (2.129)$$

Переходимо до дійсних змінних

$$x = [c_{33} - (A - C)\omega^2 - c_{14}a] \frac{s\omega^2}{\Delta(\omega^2)} \cos \omega t, \\ y = [c_{33} - (A - C)\omega^2 - c_{14}a] \frac{s\omega^2}{\Delta(\omega^2)} \sin \omega t, \\ \alpha = -[(c_{11} - M\omega^2)a - c_{14}] \frac{s\omega^2}{\Delta(\omega^2)} \sin \omega t, \\ \beta = [(c_{11} - M\omega^2)a - c_{14}] \frac{s\omega^2}{\Delta(\omega^2)} \cos \omega t. \quad (2.130)$$

Переміщення будь-якої точки вала на відстані  $a$  від центра мас визначається таким чином

$$x_B = x + a\beta, \quad y_B = y - a\alpha, \quad z_B = z - ia\vartheta. \quad (2.131)$$

Введемо у розглядання одиничний вектор, спрямований у напрямку вектора дисбалансу:

$$\epsilon_x = \cos \omega t, \quad \epsilon_y = \sin \omega t, \quad \epsilon = e^{i\omega t}. \quad (2.132)$$

Тоді проекція на цей вектор вектора відхилення вала у точці  $A$ :

$$r_{Ac} = (z - ia\vartheta)e^{-i\omega t} = \{[c_{33} - (A - C)\omega^2 - c_{14}a] + [(c_{11} - M\omega^2)a - c_{14}]a\} \frac{s\omega^2}{\Delta(\omega^2)}.$$

Проекція не залежить від часу і тому немає потреби у її усередненні. Після перетворень одержуємо таку умову автобалансування

$$r_{Ac} = -[(A + Ma^2 - C)\omega^2 - c_{33} - c_{11}a^2 + 2ac_{14}] \frac{s\omega^2}{\Delta(\omega^2)} < 0. \quad (2.133)$$

На великих швидкостях обертання ротора



$$\Delta(\omega^2) \approx M(A-C)\omega^4, \quad r_{Ac} \approx -\frac{A+Ma^2-C}{M(A-C)}s, \quad (2.134)$$

і автобалансування відбуватиметься у таких двох варіантах співвідношень між параметрами:

$$1) C > A + Ma^2; \quad 2) C < A, \quad (2.135)$$

і не буде відбуватися за умови, що

$$A < C < A + Ma^2. \quad (2.136)$$

Отже, **на великих швидкостях обертання:**

а) довгі ротори  $C < A$  автобалансуються при довільному розташуванні АБП;

б) короткі ротори  $C > A$  автобалансуються при розташуванні АБП на відстані від центра мас, що не перевищує

$$a < \sqrt{\frac{C-A}{M}}. \quad (2.137)$$

в) сферичні ротори не автобалансуються.

Розглянемо різні випадки роторів на всьому діапазоні кутових швидкостей обертання ротора.

1) Випадок довгого ротора  $C < A$ . Введемо у розглядання швидкість

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{c_{33} + c_{11}a^2 - 2ac_{14}}{A + Ma^2 - C}}. \quad (2.138)$$

За властивістю пружних систем  $c_{11}c_{33} - c_{14}^2 > 0$ . Тоді

$$c_{33} + c_{11}a^2 - 2ac_{14} > c_{33} + c_{11}a^2 - 2a\sqrt{c_{11}}\sqrt{c_{33}} = (\sqrt{c_{33}} - a\sqrt{c_{11}})^2 > 0,$$

і  $\tilde{\omega}$  - дійсне додатне число.

З точністю до знака характеристичне рівняння (2.128) має вигляд

$$a_2x^2 - a_1x + a_0 = 0, \quad x = \omega^2,$$

$$a_2 = M(A-C), \quad a_1 = c_{11}(A-C) + Mc_{33}, \quad a_0 = c_{11}c_{33} - c_{14}^2. \quad (2.139)$$

Дискримінант квадратного рівняння

$$\begin{aligned} D &= a_1^2 - 4a_0a_2 = [c_{11}(A-C) + Mc_{33}]^2 - 4(c_{11}c_{33} - c_{14}^2)M(A-C) = \\ &= [c_{11}(A-C) - Mc_{33}]^2 + 4c_{14}^2M(A-C) > 0. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Оскільки  $a_j > 0$ , то корені квадратного рівняння (2.139) додатні, дійсні, і мають вигляд

$$x_{1/2} = \frac{c_{11}}{2M} + \frac{c_{33}}{2(A-C)} \mp \sqrt{\left[ \frac{c_{11}}{2M} - \frac{c_{33}}{2(A-C)} \right]^2 + \frac{c_{14}^2}{M(A-C)}} > 0. \quad (2.141)$$

Введемо критичні швидкості

$$\omega_i = \tilde{\omega}, \quad \omega_j = \sqrt{x_1}, \quad \omega_k = \sqrt{x_2}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\} : \omega_1 < \omega_2 < \omega_3. \quad (2.142)$$

Тоді умова автобалансування (2.133) прийме вигляд

$$r_{Ac} = -\frac{(A + Ma^2 - C)s\omega^2}{A - C} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_i^2}{(\omega^2 - \omega_j^2)(\omega^2 - \omega_k^2)} < 0. \quad (2.143)$$

Автобалансування відбуватиметься між першою і другою, та над третьою критичними швидкостями:

$$\omega \in (\omega_1, \omega_2) \cup (\omega_3, +\infty). \quad (2.144)$$

2) У випадку сферичного ротора  $A = C$ , і

$$\omega_i = \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{c_{33} + c_{11}a^2 - 2ac_{14}}{Ma^2}}, \quad \omega_k = \sqrt{\frac{c_{11}c_{33} - c_{14}^2}{Mc_{33}}},$$

$$i, k \in \{1, 2\} : \omega_1 < \omega_2, \quad \Delta(\omega^2) = -(c_{11}c_{33} - c_{14}^2)(\omega^2 - \omega_i^2). \quad (2.145)$$

Умова автобалансування (2.133) приймає вигляд

$$r_{Ac} = \frac{Ma^2s\omega^2}{c_{11}c_{33} - c_{14}^2} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_i^2}{\omega^2 - \omega_k^2} < 0. \quad (2.146)$$

З умови видно, що автобалансування відбуватиметься між першою і другою критичними швидкостями:

$$\omega \in (\omega_1, \omega_2). \quad (2.147)$$

З вигляду  $\tilde{\omega}$  видно, що із зменшенням  $a$  ця швидкість необмежено зростає. Тому сферичний ротор доцільно балансувати статично одним АБП, розташованим як можна ближче до центра мас ротора.

3) Випадок короткого ротора  $A < C$ . У характеристичного рівняння один додатній і один від'ємний дійсний корінь. Розглядаємо можливі випадки, які залежать від вибору  $a$  – тобто перерізу, де буде встановлений АБП.

а)  $a: A + Ma^2 > C$ . Введемо у розглядання дві критичні швидкості  $\omega_1, \omega_2$  і параметр  $\omega_0$ :

$$\omega_i = \tilde{\omega}, \quad \omega_k = \sqrt{x_2}, \quad \omega_0 = \sqrt{-x_1}, \quad i, k \in \{1, 2\} : \omega_1 < \omega_2. \quad (2.148)$$

Тоді умова автобалансування (2.133) прийме вигляд

$$r_{Ac} = \frac{(A + Ma^2 - C)s\omega^2}{C - A} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_i^2}{(\omega^2 + \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_k^2)} < 0. \quad (2.149)$$

Автобалансування відбуватиметься між першою і другою критичними швидкостями:

$$\omega \in (\omega_1, \omega_2). \quad (2.150)$$

З (2.138) видно, що область автобалансування можна як завгодно розширити на високих швидкостях, якщо  $a \rightarrow \sqrt{(C-A)/M}$ .

б)  $a: A + Ma^2 < C$ . Введемо у розглядання критичну швидкість  $\omega_1$  і параметри  $\omega_0, \tilde{\omega}$ :

$$\omega_1 = \sqrt{x_2}, \quad \omega_0 = \sqrt{-x_1}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{c_{33} + c_{11}a^2 - 2ac_{14}}{C - A - Ma^2}}. \quad (2.151)$$

Тоді умова автобалансування (2.133) прийме вигляд

$$r_{Ac} = -\frac{(C - A - Ma^2)s\omega^2}{C - A} \cdot \frac{\omega^2 + \tilde{\omega}^2}{(\omega^2 + \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_1^2)} < 0. \quad (2.152)$$

Автобалансування відбуватиметься над першою критичною швидкістю:

$$\omega \in (\omega_1, +\infty). \quad (2.153)$$

Зауважимо, що за наявними матеріалами результати цього підпункту одержані уперше.

### 2.7.3. Ротор симетрично встановлений на ізотропні опори

В цьому випадку  $c_{14} = 0$  і характеристичне рівняння (2.128) приймає такий вигляд

$$\Delta(\omega^2) = [M\omega^2 - c_{11}][\omega^2(A - C) - c_{33}]. \quad (2.154)$$

Розглядаємо різні випадки.

1) Довгий ротор  $A > C$ . Введемо у розглядання критичні швидкості

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_{33} + c_{11}a^2}{A + Ma^2 - C}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{c_{33}}{A - C}}. \quad (2.155)$$

Для реальних роторних систем

$$\omega_1 < \omega_3 \left( \frac{c_{11}}{M} < \frac{c_{33}}{A - C} \right) \quad (2.156)$$

- частота поперечних коливань ротора менша за частоту кутових коливань. Тоді  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ . Дійсно

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{c_{33}M - c_{11}(A - C)}{M(A + Ma^2 - C)} > 0, \quad \omega_3^2 - \omega_2^2 = \frac{[c_{33}M - c_{11}(A - C)]a^2}{(A - C)(A + Ma^2 - C)} > 0.$$

В цьому випадку вдалося розташувати критичні швидкості у порядку зростання у явному вигляді. Відповідно до умови (2.144) автобалансування відбуватиметься між першою і другою та над третьою критичними швидкостями.

2) Сферичний ротор  $A = C$ . Використовуючи рівності (2.145), розташовуємо критичні швидкості у порядку зростання у явному вигляді

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_{33} + c_{11}a^2}{Ma^2}}, \quad \omega_1 < \omega_2. \quad (2.157),$$

Відповідно до умови (2.147) автобалансування відбуватиметься між першою і другою критичними швидкостями.

3) Короткий ротор  $A < C$ .

а)  $a: A + Ma^2 > C$ . Розташуємо критичні швидкості у порядку зростання у явному вигляді:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_{33} + c_{11}a^2}{A + Ma^2 - C}}, \quad \omega_1 < \omega_2. \quad (2.158)$$

Відповідно до умови (2.150) автобалансування відбуватиметься між першою і другою критичними швидкостями.

б)  $a: A + Ma^2 < C$ . Автобалансування відбуватиметься на швидкостях, більших за єдину критичну

$$\omega_1 = \sqrt{c_{11}/M}. \quad (2.159)$$

Якщо жорсткий ротор, що здійснює просторовий рух, зрівноважується двома АБП, встановленими у різних площинах корекції, то для визначення області настання автобалансування  $\Omega$  треба окремо для кожного АБП визначити критичні швидкості і відповідні області настання автобалансування  $\Omega_1, \Omega_2$ . Для повного зрівноваження ротора двома АБП необхідно і достатньо, щоб умови автобалансування виконувалися одночасно для двох АБП. Тому область автобалансування для двох АБП утворюється перетином областей автобалансування, знайдених для кожного АБП окремо:

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2. \quad (2.160)$$

Теоретично можливі наступні варіанти:

- 1) два АБП збільшують дисбаланси у власних площинах корекції;
- 2) один АБП збільшує, а другий зменшує дисбаланс у своїй площині корекції;
- 3) два АБП зменшують, чи усувають дисбаланс ротора у своїй площині корекції.

Проведені дослідження, за наявними результатами, уперше встановлюють залежність критичних швидкостей системи ротор-АБП від місця встановлення АБП. В роботах В.П.Нестеренка [103,104] застосований наближений метод, який дозволив виявити тільки ті критичні швидкості, що є резонансними частотами ротора.

## 2.8. Зрівноваження гнучких роторів

Інженерний критерій настання автобалансування може бути застосований і до гнучких роторів. Проте така задача достатньо складна, бо потребує визначення головних форм коливань гнучкого ротора і відповідних критичних швидкостей. Вважатимемо, що головні форми коливань і відповідні критичні швидкості знайдені, наприклад, за методами, викладеними в [2]. Визначимо оптимальне місце встановлення і оптимальну кількість АБП, потрібну для зрівноваження ротора між  $n$  і  $(n+1)$  критичними швидкостями. Розв'язок цієї задачі проілюструємо на прикладі шарнірно опертого на жорсткі опори однорідного вала, довжиною  $l$  і погонною масою  $m$ . (рис. 2.19).

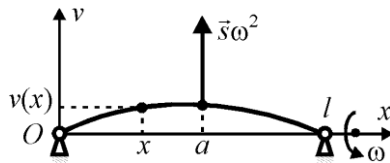


Рис. 2.19. Рух гнучкого вала на двох шарнірних опорах

Прикладемо до вала на відстані  $a$  від лівої опори елементарний дисбаланс  $s$ . З лівої опори у бік правої опори проведемо вісь  $x$ , а за напрямом вектора дисбалансу - вісь  $v$ . Диференціальне рівняння усталеного руху ротора у рухомій площині  $(x, v)$ , без врахування гіроскопічного ефекту, має вигляд

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = s\omega^2 \delta(a-x), \quad (2.161)$$

де:  $EJ$  - жорсткість вала на згин;  $v$  - поперечний прогин вала у площині  $(x, v)$ , на відстані  $x$  від лівої опори;  $\omega$  - кутова швидкість обертання ротора;  $\delta$  - дельта-функція Дірака.

Головні функції і головні частоти розглядуваного вала [2]

$$\varphi_j(x) = \sin \frac{\pi j x}{l}, \quad \omega_j^2 = \frac{EJ}{m} \cdot \frac{j^4 \pi^4}{l^4}, \quad / j=1,2,\dots / . \quad (2.162)$$

Головні форми коливань ротора показані на рис. 2.20, а.

Розкладання дисбалансу за головними функціями має вигляд

$$s\delta(a-x) = \frac{2s}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \sin \frac{\pi j a}{l} \cdot \sin \frac{\pi j x}{l}, \quad / j=1,2,\dots / . \quad (2.163)$$

Форми дисбалансу, що відповідають головним формам коливань ротора, показані на рис. 2.20, б.

Закон усталеного руху ротора - розв'язок рівняння (2.161), має вид

$$v(x) = \frac{2s}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_j^2 - \omega^2} \sin \frac{\pi j a}{l} \cdot \sin \frac{\pi j x}{l}. \quad (2.164)$$

Тоді умова автобалансування набуває вигляду

$$v(a) = \frac{2s}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_j^2 - \omega^2} \sin^2 \frac{\pi j a}{l} < 0. \quad (2.165)$$

З розв'язку (2.164) і умови (2.165) видно, що:

1) при переході першої критичної швидкості змінює напрям прогин, викликаний першою складовою дисбалансу у розкладанні (2.164), тобто починає відбуватися самоцентрування ротора по першій складовій дисбалансу, при перевищенні другої критичної швидкості - відбувається теж саме по другій складовій, і т.д.;

2) через швидке зростання (по  $j$ ) критичних швидкостей  $\omega_j$  на рух ротора істотно впливають тільки ті складові дисбалансу, що відповідають меншим за кутову швидкість обертання ротора критичним швидкостям, і найближча більша, за умови, що швидкість обертання ротора до неї наблизилася;

3) при обертанні ротора з  $j$ -ою наводорезонансною швидкістю необмежено зростає відповідна форма головних коливань ротора, причому при наближенні до резонансної швидкості знизу прогин ротора відбувається у напрямку  $j$ -ої складової дисбалансу, а при перевищенні - у протифазі;

4) автобалансування відбуватиметься відразу по перевищенні  $j$ -ої критичної швидкості, і буде порушуватися при підході до наступної  $(j+1)$ -ої резонансної швидкості, тобто між двома резонансними швидкостями  $\omega_j, \omega_{j+1}$  існуватиме проміжна швидкість  $\omega_j^*$ , при переході через яку автобалансування перестане відбуватися.

Зроблений аналіз дозволяє сформулювати критерії оптимального розташування і оптимальної кількості АБП при зрівноваженні гнучкого ротора між  $n$ -ою і  $(n+1)$ -ою критичними швидкостями.

**Критерій оптимального розташування АБП:** для забезпечення найбільшого діапазону автобалансування ротора між  $n$ -ою і  $(n+1)$ -ою критичними швидкостями необхідно встановлювати АБП у вузлах  $(n+1)$ -ої форми головних коливань ротора (рис. 2.20, в):

$$a_k = lk / (n+1), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (166)$$

Дійсно, якщо АБП буде у вузлі  $(n+1)$ -ої форми головних коливань ротора, то на нього не буде впливати стрімке зростання цієї форми при підході швидкості обертання ротора до  $\omega_{n+1}$ . Тому АБП буде продовжувати зрівноважувати ротор по першим  $n$  складовим дисбалансу при підході, і навіть у процесі переходу цієї критичної швидкості.

Зауважимо, що таке розташування АБП робить неможливим зрівноваження  $(n+1)$ -ої складової дисбалансу. Як видно з формули (2.163), АБП просто не здатний утворити цю складову.

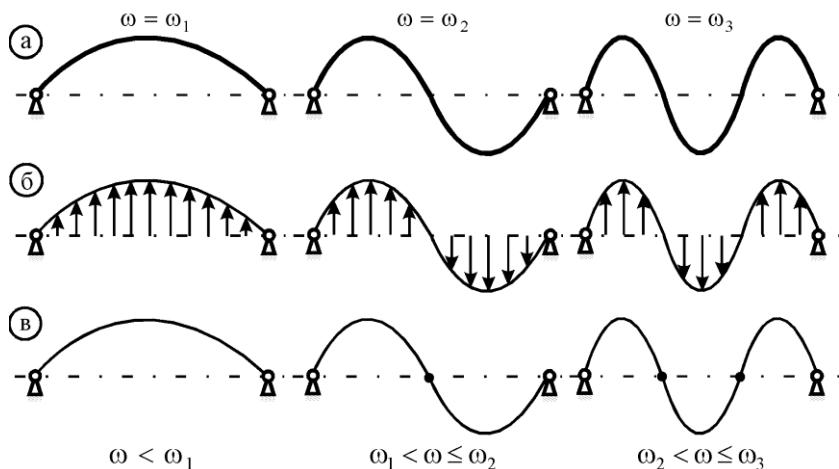


Рис. 2.20. Оптимальне розташування і оптимальна кількість АБП

**Критерій оптимальної кількості АБП:** для забезпечення найбільш повного зрівноваження ротора між  $n$ -ою і  $(n+1)$ -ою критичними швидкостями необхідно встановити  $n$  АБП у вузлах  $(n+1)$ -ої форми головних коливань ротора (рис. 2.20, в).

Дійсно, якщо будуть встановлені  $n$  АБП у вузлах  $(n+1)$ -ої форми головних коливань ротора, то вони на швидкостях між  $n$ -ою і  $(n+1)$ -ою критичними усунуть відхилення ротора від осі обертання у цих вузлах. Це унеможливить коливання ротора по першим  $n$  формам, бо їх криві не можуть одночасно проходити через всі ці точки. Але відсутність перших  $n$  форм коливань ротора свідчить про зрівноваження ротора по першим  $n$  формам дисбалансів. Відсутність АБП принаймні у одному вузлі залишає у ньому прогин. Оскільки цей прогин викликається першими  $n$  складовими дисбалансу, то одна з них буде незрівноваженою.

Зауважимо, що критерії мають місце для будь-якого гнучкого ротора і будь-яких АБП. Труднощі теоретичного розв'язання задачі пов'язані з труднощами визначення головних форм коливань ротора, які потрібні для визначення розташування вузлів. Якщо задачу розв'язувати експериментально, то достатньо визначити вузли  $(j+1)$ -ої форми головних коливань ротора, а інформація про форми коливань не потрібна.

За наявними матеріалами умови оптимального зрівноваження гнучкого ротора пасивними АБП одержані уперше.

## Висновки розділу 2

1. Тверді КВ певної форми з нерухомою точкою на осі вала ротора можуть зрівноважити ротор у площині корекції, що проходить через цю точку. Їх частинними випадками є класичні КВ - кільця, маятники, кулі, ролики, тощо. Новими є КВ, які задовольняють умовам (2.7), (2.8), чи (2.11), (2.12), зокрема це: два чи три з'єднаних під прямим кутом маятника, чи стержня; півкруг; напівциліндр; півсфера, тощо.

2. Схеми зрівноваження і віброзахисту роторів твердими КВ і відповідні АБП розрізняються за видом руху КВ відносно ротора на:

- класичні, у яких центри мас КВ рухаються у поперечних площинах ротора;
- некласичні, у яких центри мас КВ рухаються не у поперечних площинах ротора.

У свою чергу перші АБП класифікуються за виглядом КВ, що в них застосовуються (кільцеві, маятникові, кульові, тощо), а другі – за видом руху КВ відносно ротора (з сферичним рухом; що повертаються навколо поперечних осей ротора, тощо).

3. Загальною перевагою некласичних АБП над класичними є дія КВ на ротор, вал і т.п. рівно із такими силами, які потрібні для зрівноваження дисбалансу.

4. Конструкції АБП з твердими КВ допускають існування не менше одного основного усталеного руху - руху, в якому ротор зрівноважений, якщо балансувальної ємності АБП вистачає, або найбільше зрівноважений - якщо не вистачає. Автобалансування буде наставати тоді і тільки тоді, коли на робочому інтервалі кутових швидкостей обертання ротора, поза залежністю від дисбалансу і умов експлуатації ротора, хоча б один основний рух буде стійким, а всі інші рухи - нестійкими.

5. Для наближеного визначення швидкостей, на яких відбувається автобалансування, застосовний інженерний критерій автобалансування: для усунення пасивним АБП з твердими КВ відхилення деякої точки поздовжньої осі ротора від осі обертання, чи для зменшення цього відхилення рідинним АБП необхідно і достатньо, щоб ця точка під дією дисбалансу, у ній прикладеного, у середньому за один оберт ротора, відхилялася протилежно вектору дисбалансу.

6. На інженерному критерії можна будувати теоретичний і експериментальний методи визначення умов настання автобалансування для будь-яких АБП при зрівноваженні будь-яких роторів чи роторних систем. Результати, зокрема критичні швидкості, які одержуються з його використанням, співпадають з відомими результатами, одержаними іншими наближеними методами для класичних АБП, узагальнюють і доповнюють їх.



---

## Частина II. ДИНАМІКА ЗРІВНОВАЖЕННЯ І ВІБРОЗАХИСТУ РОТОРІВ ПАСИВНИМ АБП З ТВЕРДИМИ КВ

---

Друга частина монографії присвячена загальним проблемам теоретичного і експериментального дослідження динаміки ротора з АБП, та більш глибокому дослідженню динаміки класичних і некласичних АБП у рамках найбільш поширеної і актуальної моделі - ротора, який рухається плоскопаралельно і статично зрівноважується пасивним АБП. Під динамікою системи ротор-АБП розуміється процес зрівноваження і віброзахисту ротора пасивним АБП з твердими КВ, тобто явище, яке відбувається у часі за певною послідовністю. У ньому приймає участь як ротор, так і АБП. Тому для вивчення цього процесу розроблений інженерний метод незастосовний.

Перша група досліджень має на меті з'ясувати: як і якими теоретичними і експериментальними методами до цього часу досліджувалася динаміка ротора з АБП; наскільки повно ці методи дозволили провести дослідження; які явища ще не знайшли теоретичного пояснення чи експериментального підтвердження; якими шляхами можна поглибити дослідження. Відповідям на ці питання присвячені розділи 3, 4.

Друга група досліджень має на меті більш глибоко дослідити динаміку класичних і некласичних АБП з твердими КВ у рамках моделі ротора, який рухається плоскопаралельно і статично зрівноважується пасивним АБП. Така модель знайшла найбільше поширення, бо придатна для коротких роторів, якими є шліфувальні круги, CD/DVD диски, ротори багатьох екстракторів, центрифуг, сепараторів, дискові пили, автомобільні і авіаколаса тощо. До того ж у рамках цієї моделі найбільш досліджена динаміка класичних АБП. Тому є можливість порівняння одержаних результатів з вже відомими і оцінки глибини проведених досліджень. Дослідженням цієї групи присвячені розділи 5,6,7. Об'єктами досліджень є: багатокульовий (багатомаятниковий) АБП - розділ 5; АБП, у якого КВ повертається навколо повздовжньої і поперечної осі ротора - розділ 6; АБП із зв'язаними КВ і АБД - розділ 7. Цих типів АБП вистачає для теоретичного виявлення і експериментальної перевірки майже усіх явищ і ефектів, якими супроводжується процес автобалансування і віброзахисту ротора. Проте слід відзначити, що автором досліджувалася динаміка і інших типів АБП, зокрема - маятникового АБП із зв'язаними КВ [139-142], та АБП з КВ, насадженими на поперечні осі ротора [153-157].

### РОЗДІЛ 3.

## ЗАДАЧІ І МЕТОДИ ТЕОРЕТИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ЗРІВНОВАЖЕННЯ І ВІБРОЗАХИСТУ РОТОРІВ ПАСИВНИМИ АБП

### 3.1. Огляд наукових праць і методів з теоретичного дослідження

**1. Основні роботи з дослідження динаміки АБП.** Огляд літератури з динаміки пасивних АБП засвідчує, що теоретичне дослідження процесу зрівноваження ротора пасивними АБП традиційно зводиться до: побудови математичної моделі ротора і АБП; визначення у рамках цієї моделі істотно відмінних усталених рухів, у яких КВ синхронно обертаються з ротором – основних, в яких ротор зрівноважений, якщо ємності АБП для цього вистачає, або найбільш зрівноважений, якщо ні, і побічних – в яких ротор розбалансований; дослідження стійкості основних і побічних усталених рухів. Критерієм настання автобалансування є стійкість принаймні одного основного руху і нестійкість або не існування всіх побічних усталених рухів на робочому інтервалі кутових швидкостей обертання ротора. Робочі інтервали кутових швидкостей визначаються за результатами дослідження стійкості усталених рухів системи ротор – АБП.

Елементи динаміки основних типів класичних пасивних АБП можна знайти в роботах E.L.Thearle [3,4], Дж. Ларрі [6], книгах А.А.Гусарова, В.І.Сусаніна, Л.Н.Шаталова, Б.Н.Грушина [7], А.А.Гусарова [8].

Робіт, присвячених суто динаміці маятникового АБП Kendall Clark, наскільки нам відомо, немає. Однак, у статті Л.І.Мочабелі [87] і книзі І.І.Блехмана [65] у рамках плоскої моделі розглядається система, що складається із зрівноваженого ротора, насадженого на невагомий гнучкий вал, двох маятників, прикріплених з різних сторін до ротора. При цьому вивчається стійкість руху, у якому маятники розташовані вздовж діаметра ротора і вал суміщений із віссю обертання. Встановлено, що для стійкості такого руху необхідно, щоб ротор обертася із швидкостями, які перевищують власну частоту системи. Тут і нижче під останньою мається на увазі частота власних коливань ротора при нерухомих КВ (маятниках) і неврахуванні сил опору.

Динаміка кільцевого АБП, який містить два кільця і зрівноважує вертикально розташований ротор, вивчена в кандидатській дисертації А.Я.Лаца [86]. При цьому для пристрою встановлено існування до трьох критичних швидкостей, і настання автобалансування незалежно від величини дисбалансу на швидкостях, які перевищують найбільшу критичну швидкість.

Найбільше вивченою є динаміка кульового АБП, або маятникового, за умови, що маятники - математичні.

У рамках різних плоских моделей динаміка цих пристроїв вивчена в роботах: загального спрямування - І.І.Блехмана [65], А.Н.Горбенко, О.П.Радченко [66], А.Н.Горбенко [67,68], Ф.М. Детинко [69], В.І.Кравченка [70,75-79], В.І.Кравченка О.О.Гусарова [85], А.І. Муйжницька [88,89], В.П.Нестеренка [103-111], В.П.Нестеренка, А.П.Соколова [112-114], В.П.Нестеренка, С.Л.Катанухіної [116], Г.Б. Філімоніхіна [143-148], J. Adolfsson [50], J.D.Alexander [51], P. Bövik, C. Högfors [52], J.W.Cade [53], J.Chung, D.S.Ro [54], J.Chung, I.Jang [55], C.H.Hwang, J.Chung [56], I. Inove, Y. Araki, S.Miyara [57], Y.Jinouchi, Y.Araki, J.Inoue, Y.Ohtsuka, C.Tan [58], J.R.Kang, C.P.Chao, C.L.Huang, C.K.Sung, [59], J.K.Lee, W.K. Van Moorhem [60], J.S.Park, et al. [61], C.Rajalingham, S.Rakheja [62], S.Shimizu, H.S.Lee [63]; з динаміки ручних шліфувальних машин - Ю.В.Агафонова [177, 178], Ю.В.Агафонова, Б.Г.Гольдштейна [179], С.Н.Кладієва [180], Л.А.Пашкової [181], S.Emanuelsson [174], T.Miwa, K.Suzuki, T.Kawaguchi, Y.Kawakami, S.Ohtsu [175], C.Rajalingham, R.B.Bhat, S.Rakheja [176], та інших; з динаміки шліфувальних верстатів - Б.И.Горбунова, В.Г.Гусева [182], Б.И.Горбунова, В.Г.Гусева, А.Ф.Прохорова [183], Ю.С.Рейбаха [184], Ю.С.Рейбаха, А.И.Ривкина [185,186], та інших; з динаміки CD/DVD приладів - W.D.Kim, H.O.Kwon, M.S.Jeon [187], W.Kim, J.Chung [188], і інших.

У рамках ряду просторових моделей динаміка кульового АБП вивчена в роботах Р.Bovik, C.Hogfors [52], J.Chung, I.Jang [55], В.П.Нестеренка [103,104,106,109], В.П.Нестеренка, А.П.Соколова [112], і інших вчених.

Майже всі перелічені роботи присвячені дослідженню динаміки двокульових (двохмаятникових) АБП. Виключення складають роботи А.Н.Горбенко [68], Г.Б. Філімоніхіна [146-148], у яких, за наявними матеріалами, уперше аналітично досліджується динаміка багатоккульових (багатомаятникових) АБП, причому у першій роботі [68] досліджується стійкість тільки основних рухів, а в роботах [146-148] - досліджується стійкість основних і побічних рухів, зокрема умови існування і стійкість квазіперіодичних рухів.

Конструкція, принцип дії і динаміка маятникових АБП з в'язями вивчена в роботах Г.Б. Філімоніхіна [139-142] (повний перелік робіт з дослідження динаміки АБП - у авторефераті [139]).

Динаміка некласичних АБП вивчалася в роботах О.А.Горошко, Г.Б.Філімоніхіна [163], Ю.А.Невдахи [90,95-97], В.С.Сотнікова [128,133], Г.Б.Філімоніхіна [153-159,162], Г.Б.Філімоніхіна, Ю.А.Невдахи [98,99,101,102], Г.Б.Філімоніхіна, В.С.Сотнікова [135-137].

Для узагальнення задач теоретичного дослідження коротко розглянемо зміст робіт з динаміки АБП, що ґрунтуються на принципово різних

підходах і проаналізуємо ці підходи. При цьому найбільшу увагу приділимо математичним методам, моделям ротора і АБП, найбільш істотним результатам досліджень, одержаним із застосуванням різних методів.

**2. Кінетостатичний, або квазістатичний метод.** У статтях E.L.Thearle (Е.Сирла) [3,4] (1950 р.) для дослідження процесу зрівноваження ротора пасивними АБП був застосований кінетостатичний, або квазістатичний метод. Він ґрунтується на припущенні, що перехідні процеси на рух ротора з АБП майже не впливають і тому рух системи уявляється таким чином:

1) система ротор-АБП обертається навколо осі обертання як жорстке ціле;

2) КВ дуже повільно реагують на сили, що на них діють у поточному відносно ротора положенні і у решті решт приходять у положення відносної рівноваги.

Відповідно до цих припущень замість диференціальних рівнянь руху ротора і АБП складаються рівняння кінетостатики. Метод був застосований у припущенні, що опори ізотропні і зовнішні сили опору відсутні. Для кільцевого і кульового АБП була застосована плоска модель ротора. Для рідинних і маятникового АБП Kendall Clark була застосована, не зовсім коректно, модель ротора з нерухою точкою. Некоректність моделі полягає у тому, що без належного обґрунтування не були враховані складові, які дає тензор інерції ротора. Тому у рівняння усталеного руху ротора з АБП не входять складові з осьовими моментами інерції ротора, зокрема гіроскопічні сили.

Для рідинних і маятникового АБП цей метод дозволив визначити одну критичну швидкість, яка зокрема залежить від місця встановлення АБП на валу ротора. При перевищенні цієї швидкості починає відбуватися автобалансування. Була оцінена ефективність зрівноваження ротора. Встановлено, що пристрої збільшують відхилення вала від осі обертання на докритичних швидкостях і зменшують на закритичних. У силу конструктивних особливостей пристрої не здатні повністю усунути відхилення вала від осі обертання. Через неврахування тензору інерції не був виявлений вплив на критичні швидкості осьових моментів інерції ротора.

Для двохкульового АБП, у випадку, коли ємності куль вистачає для зрівноваження дисбалансу, було виявлено існування одного основного і трьох побічних усталених рухів. У основному русі кулі відхилені у легкий бік ротора рівно настільки, що його зрівноважують. У першому побічному русі кулі притиснуті одна до одної і розташовані з важкого боку ротора, у другому - з легкого, у третьому - кулі знаходяться одна навпроти другої на діаметрі кола, на якому лежить дисбаланс ротора. Було встановлено існування однієї критичної швидкості, яка співпадає з власною частотою системи. Щодо стійкості усталених рухів, то було

встановлено наступне: основний рух стійкий на закритичних швидкостях, а на докритичних - нестійкий, а перший побічний рух - навпаки; другий і третій побічні рухи - нестійкі. На підставі проведених досліджень зроблений висновок про настання автобалансування на закритичних швидкостях.

Підхід E.L.Thearle у тій чи іншій модифікації застосовувався у роботах Дж. Ларрі [6], А.А.Гусарова, В.І.Сусаніна, Л.Н.Шаталова, Б.Н.Грушина [7], А.А.Гусарова [8], J.D.Alexander [51], J.W.Cade [53], А.І.Муйжнієка [88,89], Ю.С.Рейбаха [184], Ю.С.Рейбаха, А.І.Ривкіна [185,186] і інших. При подальшому розвитку цей підхід дозволив дослідити вплив на якість балансування ротора сухого тертя, неточності виготовлення і встановлення бігової доріжки, тощо.

Серед робіт, що використовують кінетостатичний метод, виділяються роботи А.І.Муйжнієка [88,89] (1959 р.). У роботах для дослідження стійкості усталених рухів застосована теорема Лежен-Дирихле і друга теорема Ляпунова про стійкість рівноваги систем з ідеальними в'язями в консервативному силовому полі. При цьому знайдений аналог потенціальної енергії системи, який досліджений на екстремум в околі основного і побічних рухів. При виконанні дослідження передбачалося, що сили пружності зрівноважуються відцентровими силами. Це привело до виникнення залежності між координатами, що визначають положення системи. Так кількість степенів вільності системи з чотирьох була знижена до двох кутових координат, які визначають положення куль відносно ротора. Тому аналог потенціальної енергії досліджувався на умовний екстремум.

В цілому результати А.І.Муйжнієка, що стосуються стійкості рухів, збігаються з результатами E.L.Thearle. Проте є невірний висновок про стійкість при будь-яких дисбалансах на закритичних швидкостях обертання ротора руху, у якому кулі торкаються одна одної і знаходяться з легкого боку ротора, тобто другого побічного руху. Аналіз роботи показав, що при дослідженні стійкості першого і другого побічних рухів некоректно була знижена кількість степенів вільності системи з 2-х до 1-ої. Це відбулося через припущення, що кулі торкаються одна одної. Можна перевірити, що у випадку, коли ємності куль вистачає для зрівноваження ротора, стійкість другого побічного руху втрачається через розходження куль. Автором монографії був отриманий вірний результат шляхом підстановки в формули (26) статті А.І.Муйжнієка [89] кутів для другого побічного руху. Результат наступний: якщо ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора, то другий побічний рух нестійкий на будь-яких швидкостях обертання ротора; якщо ємності не вистачає, то це основний рух, бо ротор у ньому найбільш зрівноважений, причому стійкий на зарезонансних

швидкостях обертання ротора, і нестійкий - на дорезонансних.

Кінетостатичний метод дає в цілому вірну поведінку системи ротор-АБП. Це найпростіший метод дослідження динаміки жорсткого ротора на ізотропних опорах з конкретним типом АБП. Він дозволяє: виявляти основні і побічні рухи системи; оцінювати їх стійкість; виявляти (наближено) критичні швидкості системи; враховувати вплив на якість зрівноваження ротора сил сухого тертя, неточності виготовлення і розміщення бігової доріжки, тощо. Щодо умов настання автобалансування, то у випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора, квазістатичний метод і інженерний метод, запропонований у першій частині монографії, дають однакові результати. Тому квазістатичний метод слід застосовувати тоді, коли треба виявити вплив на якість зрівноваження ротора інших факторів, зокрема вплив сил сухого тертя, неточності виготовлення і встановлення бігової доріжки, тощо.

**3. Метод, який ґрунтується на теорії стійкості усталених рухів нелінійних автономних систем.** Однією з перших робіт, присвячених дослідженню динаміки кульового АБП через диференціальні рівняння руху системи, є стаття Ф.М.Детинко [69] (1959 р.). У роботі досліджувалася стійкість тільки основного руху для систем, що складаються із: ротора, насадженого з ексцентриситетом на невагомий гнучкий вал і двохкульового АБП для зрівноважування ротора; декількох роторів, насаджених із ексцентриситетом на вагомий гнучкий вал і тієї ж кількості АБП для зрівноважування цих роторів.

Для першої системи в рамках плоскої моделі виведені рівняння руху відносно рухомої системи координат, жорстко зв'язаної з ротором. При цьому отримана система звичайних нелінійних автономних диференціальних рівнянь другого порядку. Рівняння приведені до безрозмірного вигляду (без введення безрозмірного часу). Для основного стаціонарного руху складені рівняння першого наближення. Характеристичне рівняння через гноміздкість в загальному випадку не записане і досліджене для окремих дисбалансів, без строгого обґрунтування такої можливості. У некритичних випадках при дослідженні стійкості був застосований метод прямого розкладання коренів полінома за степенями малого параметра. При цьому за малий параметр було прийняте відношення маси кулі до маси всієї системи. У критичних випадках застосована теорія Ляпунова для випадку одного нульового кореня. У результаті досліджень аналітично знайдена необхідна (а з врахуванням граничних співвідношень – і достатня) умова стійкості, еквівалентна вимозі, щоб ротор обертася з швидкостями, що перевищують власну частоту системи. Числовим дослідженням коренів характеристичного рівняння показано, що стійкість основного руху може наставати на швидкостях, які дещо перевищують критичну швидкість ротора.

Отримані результати узагальнені при розгляді другої системи. При цьому встановлено, що якщо в системі один ротор і вал вільно опирається, то для стійкості основного руху необхідно, щоб швидкість обертання вала була вища його непарних критичних швидкостей і нижче парних того ж вала, але з проміжною опорою у перерізі, де знаходиться АБП. Якщо ж у системі два ротори, то для стійкості необхідно, щоб швидкість обертання була вища парних критичних швидкостей вала і нижче непарних того ж вала, але з проміжними опорами в перерізах, де містяться АБП. Зауважимо, що при визначенні критичних швидкостей вагомого вала застосовувалися результати роботи А.Н.Крилова [215].

Таким чином, підхід Ф.М.Детинко ґрунтується на теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем і зокрема на теорії стійкості за першим наближенням [223-235]. Теорія стійкості за першим наближенням дозволяє знайти в просторі параметрів системи області асимптотичної стійкості (у малому). При цьому виникає задача складання характеристичного рівняння і застосування до нього одного з критеріїв від'ємності дійсних частин коренів поліномів. Останнє на практиці викликає найбільші труднощі. У [69] ці труднощі були обійдені шляхом застосування метода прямого розкладання коренів поліномів за степенями малого параметра. У рамках плоскої моделі ротора на ізотропних в'язко-пружних опорах Ф.М.Детинко фактично не одержав нових аналітичних результатів щодо умов настання автобалансування. Тому цей метод тривалий час не застосовувався.

Автором монографії у кандидатській дисертації [139] була доведена ефективність розглядуваного підходу при дослідженні динаміки маятникових АБП з в'язями. Були подолані труднощі, з якими стикнувся Ф.М.Детинко, шляхом внесення таких змін у реалізацію підходу:

- диференціальні рівняння приводяться до безрозмірного вигляду разом з введенням безрозмірного часу, що робить обґрунтованим подальше виділення малих параметрів;
- при складанні характеристичних рівнянь застосовується методика комплексного псевдозгортання, яка дозволяє збільшити кількість нульових елементів у визначнику, що дає можливість одержати характеристичне рівняння у явному вигляді;
- при наближеному визначенні коренів характеристичного рівняння методом розкладання розв'язків алгебраїчних рівнянь за степенями малого параметра, останні виділяються у ряді важливих з точки зору практики випадках, що робить дослідження більш всебічними.

В дисертації досліджена плоска модель ротора на ізотропних в'язко-пружних опорах, у рамках якої ротор зрівноважується чотирьохмаятниковим і двохмаятниковим АБП з в'язями. Були досліджені: кількість і

умови існування усталених рухів; стійкість рухів у випадках, коли маса КВ набагато менша маси ротора, коли ротор швидко обертається, для великих сил зовнішнього опору, для великих сил внутрішнього опору, при відсутності сил опору. За допомогою розглядуваного методу уперше аналітично встановлені такі явища, що характеризують процес автобалансування.

1) Кількість і величини критичних швидкостей залежать від дисбалансу, що зрівноважується, відношення маси КВ до маси всієї системи, і інших параметрів системи.

2) При малих силах опору існують одна чи три критичні швидкості, такі, що основний рух стійкий відповідно на швидкостях, що перевищують єдину критичну, або між першою і другою, та над третьою критичною швидкістю.

3). Якщо маса КВ набагато менша маси ротора і у системи три критичні швидкості, то у нульовому наближенні всі три критичні швидкості співпадають з частотою власних коливань системи, а поправки до швидкостей у наступних наближеннях можуть бути пропорційні кореню третього степеня з малого параметра.

У дисертації, також уперше, для кожного граничного випадку були знайдені розкладання коренів характеристичного рівняння за степенями малого параметра. Це дозволило оцінити власні частоти системи, швидкість затухання перехідних процесів і демпфірування в системі.

Автором монографії у роботі [143] (1996 р.) були одержані аналогічні результати для двохмятникового (двокульового) АБП. Наявність у рамках плоскої моделі ротора на ізотропних опорах до трьох критичних швидкостей, що вище резонансної, уперше пояснили, чому кульовий АБП працездатний на швидкостях, що більші за резонансну. Те, що критичні швидкості розкладаються у ряд за дробовими степенями малого параметра, уперше пояснило, чому критичні швидкості можуть значно перевищувати резонансну швидкість, навіть при невеликих значеннях параметра, який є малим у розкладаннях.

Серед сучасних робіт, присвячених дослідженню динаміки двохкульових АБП розглядуваним методом, слід виділити низку робіт зарубіжних вчених J. Adolfsson [50] (1997 р.), Lee J.K., Van Moorhem W.K. [60] (1999 р.), Rajalingham C., Bhat R.B., Rakheja S. [62] (1998). В них, як і у роботах [69,143], використовується модель ротора, який рухається плоскопаралельно, рухома система координат, яка обертається разом з ротором і теорія стійкості усталених рухів нелінійних автономних систем. Але стійкість досліджується числовими методами, шляхом обчислення дійсних частин коренів характеристичного рівняння для певних значень параметрів системи. Тому отримані в них результати мають частинний характер. В роботах підтверджено існування однієї чи



трьох критичних швидкостей, настання автобалансування на швидкостях, що перевищують власну частоту системи, залежність критичних швидкостей від дисбалансу, відношення маси КВ до маси ротора, сил опору, та інші результати, одержані в роботі [143]. Слід відзначити, що числові дослідження коренів характеристичного рівняння проводив у своїй роботі і Ф.М.Детинко [69], але кількість здобутих результатів - незначна, що пов'язано із низьким на той час рівнем розвитку обчислювальної техніки.

За допомогою розглядуваного методу, у рамках моделі ротора, якій рухається плоскопаралельно, досліджена динаміка ряду неklasичних АБП в роботах О.А.Горошко, Г.Б.Філімоніхіна [163], Ю.А.Невдахи [90,95-97], В.С.Сотнікова [128,133], Г.Б.Філімоніхіна [153-159,162], Г.Б.Філімоніхіна, Ю.А.Невдахи [98,99,101,102], Г.Б.Філімоніхіна, В.С.Сотнікова [135-137]. Також у роботах Г.Б.Філімоніхіна [146-148] досліджена динаміка багатокуюльових (багатомаятникових) АБП. Результати цих досліджень будуть викладатися у наступних розділах.

Таким чином, метод застосовний для роторів на ізотропних опорах. Це єдиний метод, що дозволяє виявляти всі критичні швидкості системи ротор-АБП без математичного спрощення задачі. Також метод дозволяє знаходити власні частоти системи, оцінювати швидкість затухання перехідних процесів і демпфірування в системі. Він дозволяє застосовувати ПЕОМ для точного визначення вказаних динамічних параметрів системи при будь-яких значеннях параметрів системи.

**4. Метод, якій ґрунтується на теорії стійкості періодичних рухів нелінійних неавтономних систем.** Задача дослідження стійкості основного і побічних рухів двохкуюльового АБП у рамках плоскої моделі ротора на ізотропних пружних опорах була вирішена І.І.Блехманом [65]. При цьому був застосований критерій стійкості періодичних розв'язків неавтономних систем, близьких до довільних нелінійних. Під час розв'язання рівняння руху були записані відносно нерухомих осей. Зауважимо, що при відліку кутів, які визначають положення куль відносно осі, жорстко зв'язаної з ротором, ці рівняння є системою звичайних нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку. При цьому основним і побічним рухам відповідають періодичні розв'язки. Дослідження стійкості показало, що при обертанні ротора з зарезонансними швидкостями з усіх періодичних рухів стійкий тільки той, у якому ротор найбільше зрівноважений. Результати, одержані у роботі, співпали з результатами E.L.Thearle, у випадку, коли ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора. Новим був одержаний результат, що якщо ємності АБП не вистачає для зрівноваження ротора, то єдиним стійким рухом на зарезонансних швидкостях обертання ротора буде рух, у якому кулі максимально відхилені у легкий бік ротора. У роботі для застосування

критерію стійкості в рівняння руху був введений малий параметр. При цьому рівняння не були приведені до безрозмірного вигляду і тому можливість і спосіб уведення цього параметра залишилися не обговореними.

Підхід І.І.Блехмана ґрунтується на теорії стійкості періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь [65,226,229,230,239]. Теоретично підхід дозволяє знайти в просторі параметрів системи області асимптотичної стійкості. На практиці для цього необхідно для рівнянь першого наближення скласти характеристичне рівняння і після відомої заміни змінної застосувати, наприклад, критерій Рауса-Гурвіца. Однак, у загальному випадку, складання характеристичного рівняння для лінійних диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами не менше складна задача, ніж задача інтегрування цих рівнянь у загальному виді. Тому задача вирішується наближено, шляхом виділення в рівняннях першого наближення малого параметра. Таким чином, розглядуваний підхід теоретично дозволяє одержати необхідні (а з врахуванням граничних співвідношень і достатні) умови асимптотичної стійкості в малому при малому значенні одного з параметрів системи. Необхідно відзначити, що застосування підходу ефективно тоді, коли вже за першим наближенням за введеним малим параметром можна робити висновки про стійкість руху. Це вдалося зробити тільки при неврахуванні сил в'язкого опору в опорах. Тому знайдені умови стійкості є необхідними.

Розглядуваний метод застосовувався до кульових АБП у багатьох роботах, зокрема в роботах Ю.В.Агафонова [177,178], Ю.В.Агафонова, Б.Г.Гольдштейна [179], С.Н.Кладієва [180], В.І.Кравченка [70,75,78,79], В.П.Нестеренка [103-111], В.П.Нестеренка, А.П.Соколова [112-114], В.П.Нестеренка, С.Л.Катанухіної [116], Л.А.Пашкової [181], та інших. Розглянемо деякі з них.

В роботах Ю.В.Агафонова [20, 21], Ю.В.Агафонова, Б.Г.Гольдштейна [22] у рамках різних плоских моделей ротора і двохкульового АБП досліджувалася динаміка ручної шліфувальної машини, як на холостому ході, так і під час різання (шліфування). При цьому досліджувалася стійкість тільки основного руху. За наявними матеріалами це перші роботи, у яких досліджувалася динаміка двохкульових АБП у рамках таких плоских моделей: ротор пружно закріплений у масивному тілі, яке також пружно закріплене; пружно закріплений ротор виконує операцію різання; ротор пружно закріплений у масивному тілі, яке також пружно закріплене і виконує операцію різання. Також, за наявними матеріалами, у роботі [179] уперше досліджувався вплив на динаміку системи ротор-АБП: опор з інтегро-диференціальними реологічними властивостями; ексцентриситету бігової доріжки; невеликої зміни кутової швидкості

обертання ротора, яке виникає через різання. Для одномасової моделі ротора, при операції різання встановлено, що автобалансування відбуватиметься за умови, що швидкість обертання ротора достатньо віддалена від зони резонансних коливань системи, яка виникає у наслідку операції різання. Для двохмасової системи на холостому ходу встановлені дві області автобалансування (що збігається з результатами, одержаними із застосуванням інженерного критерію). Показано, що у випадку двохмасової системи, під час різання, можлива втрата стійкості основного руху.

Слід відзначити, що у подальшому дослідження аналогічними методами процесу зрівноваження кульовими АБП ручних шліфувальних машин проводили В.П.Нестеренко [103,104,122], В.П.Нестеренко, Б.Г.Гольдштейн, А.П.Соколов [120], Нестеренко В.П., С.Л.Катанухіна, С.Н.Кладієв, Б.А.Півнев, А.М.Фурманов [121], а також С.Н.Кладієв [180] і Л.А.Пашкова [181] - під науковим керівництвом В.П.Нестеренко.

Багаторядний кульовий АБП досліджувався у дисертаційній роботі В.І.Кравченка [70]. Ця робота узагальнює результати робіт [71-85], та інших, повний перелік яких наведений в авторефераті [70], виконаних автором особисто, та у співавторстві з В.А.Ромащенко, А.А.Гусаровим, та іншими вченими.

З точки зору дослідження динаміки таких АБП розроблена математична модель статичного зрівноваження ротора на ізотропних в'язкопружних опорах багаторядним кульовим АБП. У рамках цієї моделі ротор – плоский диск, який рухається у своїй площині, обертається із сталою кутовою швидкістю, і насаджений з ексцентриситетом на вал. Його зрівноважують кулі, які розглядаються як матеріальні точки і які рухаються у площині диска по кільцевим доріжкам з центром у точці перетину диска віссю вала. Рухам куль відносно ротора перешкоджають сили в'язкого тертя. Модель досліджена без врахування сил опору (як зовнішніх, так і внутрішніх) у випадку двох куль, розміщених у різних рядах при дисбалансах, при яких кулі можуть зрівноважити ротор. При цьому виділені основні і побічні усталені рухи системи і досліджена їх стійкість. За допомогою підходів І.І.Блехмана і А.І.Муйжнієка встановлено, що основний рух (може бути) стійкий на зарезонансних швидкостях обертання ротора, а на дорезонансних – нестійкий. Побічний рух, у якому кулі знаходяться з важкого боку ротора (може бути) стійкий на дорезонансних швидкостях обертання ротора, а на зарезонансних – нестійкий. Побічні рухи, у яких одна куля знаходиться з важкого, а друга – легкого боку ротора завжди нестійкі. Побічний рух, у якому кулі знаходяться з легкого боку ротора (може бути) стійкий на зарезонансних швидкостях обертання ротора, а на дорезонансних – нестійкий. За результатами досліджень зроблений

висновок, що у ротора існує одна критична швидкість, при перевищенні якої настає автобалансування. У роботі одержані необхідні умови стійкості рухів, які інтерпретовані як достатні, зроблений невірний висновок про стійкість останнього побічного руху на зарезонансних швидкостях (див. аналіз підходу А.І.Муйжнієка). Також у роботі не досліджений випадок дисбалансів, яких кулі не можуть зрівноважити.

Однорядні двохкульові і рідинний АБП досліджені у докторській дисертації В.П.Нестеренка [103]. Ця робота узагальнює результати робіт [104-127], та інших, повний перелік яких наведений в авторефераті [103], виконаних автором особисто, та у співавторстві з А.П.Соколовим, С.Л.Катанухіної та іншими вченими.

З точки зору дослідження динаміки таких АБП розроблені різні математичні моделі ротора і АБП: плоский ротор на анізотропних в'язкопружних опорах з двохкульовим АБП; консольний ротор з кульовим АБП; система двох роторів з двома кульовими АБП; ротор з нерухою точкою і двома кульовими АБП, встановленими у різних площинах корекції; ротор, що здійснює просторовий рух з двома кульовими АБП, встановленими у різних площинах корекції. У всіх моделях ротор обертається із сталою кутовою швидкістю навколо певної осі обертання. У рамках різних моделей досліджувалася стійкість тільки основних рухів, причому у випадку, коли у одному АБП дві кулі, ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора і відсутні сили опору. Це перша робота, в якій на прикладі двохкульових АБП досліджені фактори, що впливають на процес автобалансування при зрівноваженні жорстких роторів при їх різному пружному закріпленні.

Таким чином метод застосовний для наближеного вивчення динаміки АБП у випадках, коли вже за першим наближенням можна зробити висновок про стійкість, чи нестійкість усталеного руху. Це коли маса КВ набагато менша маси ротора і відсутні сили в'язкого опору в опорах. Це пояснює, чому при застосуванні розгляданого методу не вдалося дослідити інші важливі з точки зору практики випадки - коли ротор швидко обертається, скінчених сил опору, та інших. В цих випадках перші наближення не дозволяли оцінювати стійкість, а одержання наступних наближень - занадто громіздка задача.

Слід відзначити, що розглядуваний метод виявився одним з найбільш плідних. Це перший метод, який дозволив вивчити автобалансування роторів: на анізотропних опорах; у випадках неплоского руху пружно закріпленого жорсткого ротора; під час різання. Але інженерний критерій настання автобалансування дозволяє одержувати такі ж самі умови настання автобалансування з меншою кількістю перетворень.

**5. Метод, якій ґрунтується на застосуванні асимптотичних методів.** Р. Bövik, С. Högfors у [52] у рамках плоскої моделі досліджували динаміку двохкульового АБП, що зрівноважує ротор на анізотропних опорах. При дослідженні були використані рівняння руху, складені відносно нерухомих осей. У якості математичного методу був застосований метод багатьох масштабів [243]. За малий параметр було прийняте відношення ексцентриситету до радіуса бігової доріжки і відношення маси кулі до маси всієї системи. Зауважимо, що саме такий спосіб введення малого параметра неявно використовується практично у всіх роботах, що ґрунтуються на підході І.І.Блехмана. У результаті досліджень була встановлена стійкість у цілому з усіх рухів тільки основного - на закритичних швидкостях обертання ротора. Висновок про стійкість дозволило зробити наближення першого порядку до розв'язання рівнянь руху. Необхідно відзначити, що аналогічні результати, але з використанням підходу І.І.Блехмана, намагався отримати раніше В.П.Нестеренко [111]. Але він не одержав наближень, які включають сили опору і дав висновок про відсутність впливу сил в'язкого опору на процес автобалансування. Щодо величин критичних швидкостей, то вони збігаються з результатами В.П.Нестеренко [111].

В роботі [52] також досліджувалася модель ротора з нерухою точкою, в якій статично і динамічно незрівноважений ротор, насаджений на абсолютно жорсткий вал з нерухою точкою. При цьому його зрівноважують дві кулі, що пересуваються, на відміну від класичних моделей, не по кільцевій, а по циліндричній бігівій доріжці. Було встановлене існування областей швидкостей, усередині яких асимптотично стійкий (у малому) тільки той рух, у якому ротор найбільше зрівноважений. Зокрема було встановлено, що останнє має місце для ротора, що швидко обертається.

Метод ефективний, коли вже за першим наближенням можна зробити висновок про стійкість, чи нестійкість руху. Тому ним вдалося дослідити тільки два згаданих випадки. Метод застосовний для роторів на анізотропних опорах. Він дозволяє встановлювати глобальну стійкість, але при малому значенні одного чи групи параметрів системи. Метод дозволяє вивчати перехідні процеси в системі, бо при його застосуванні наближено інтегруються диференціальні рівняння руху. Для врахування впливу сил в'язкого опору на процес автобалансування цей метод краще підходить, ніж попередній, проте кількість перетворень, що проводяться при застосуванні метода, значно більші. Тому за наявними матеріалами цей метод більше не використовувався. У першому наближенні метод дає ті ж самі критичні швидкості, що і попередні.

**6. Порівняння різних методів.** Аналіз запропонованого інженерного і розглянутих методів дозволяє зробити такі висновки щодо ефективності, областей застосування і інших характеристик методів.

1) Інженерний метод застосовний для будь-якої роторної системи, зокрема для гнучких і жорстких роторів, для роторів, що виконують певні технологічні функції, для роторів на анізотропних опорах, тощо. Він дозволяє незалежно від типу пасивного АБП наближено визначати критичні швидкості, при переході через які настає, чи порушується автобалансування. Метод не придатний для виявлення і дослідження усталених рухів системи ротор-АБП, більш точного визначення критичних швидкостей, дослідження динаміки ротора з АБП, та іншого. У випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора, критичні швидкості, які дає метод, повністю збігаються з критичними швидкостями, які одержуються (у найнижчих наближеннях) іншими методами. Пояснюється це тим, що у нульовому наближенні покладається, що малий параметр дорівнює нулю. При цьому, звичайно, ротор сам визначає свій рух, і цей рух відбувається під дією малого дисбалансу, так само, як і в інженерному методі. У наступному - першому наближенні досліджується реакція АБП на відхилення, яке було зафіксоване у нульовому наближенні. Це також забезпечує інженерний підхід. Оскільки в абсолютній більшості досліджень саме відношення маси КВ до маси ротора прийнято за малий параметр, то стає зрозумілим, чому результати інженерного метода повністю погоджуються з результатами інших методів.

2) Кінетостатичний, або квазістатичний метод. Він придатний тільки для роторів на ізотропних опорах. Він дозволяє для конкретних АБП: виявляти основні і побічні усталені рухи системи ротор-АБП, у яких КВ синхронно обертаються з ротором, оцінювати їх стійкість; визначати наближено критичні швидкості, при переході через які настає, чи порушується автобалансування; оцінювати вплив на якість зрівноваження ротора сил сухого тертя і деяких конструктивних параметрів АБП. Метод не придатний для дослідження квазіперіодичних рухів системи ротор-АБП, не дозволяє досліджувати перехідні процеси, уточняти критичні швидкості і інше.

3) Метод, що ґрунтується на теорії стійкості усталених рухів нелінійних автономних систем. Метод застосовний тільки для роторів на ізотропних опорах. Він є узагальненням кінетостатичного методу, бо рівняння кінетостатики одержуються з диференціальних рівнянь руху системи, якщо покласти, що похідні дорівнюють нулю. Це єдиний метод, який дозволяє: визначати критичні швидкості системи ротор-АБП з будь-якою точністю; наближено і точно визначати власні частоти системи; оцінювати швидкість згасання перехідних процесів і демпфірування в системі; досліджувати стійкість у малому без накладання обмежень на

параметри системи. Він придатний для дослідження квазіперіодичних рухів системи ротор-АБП, а саме для дослідження стійкості і умов існування рухів, з яких зароджуються квазіперіодичні рухи. Метод придатний для дослідження впливу невеликих збурень на рух ротора - дія певних збурних сил, раптова зміна параметрів системи (зміна дисбалансу, початкових умов). Метод не придатний для дослідження несиметричних систем - роторів на анізотропних опорах, роторів під час різання, тощо.

4) Метод, що ґрунтується на теорії стійкості періодичних рухів нелінійних неавтономних систем. Метод застосовний для будь-яких роторів і роторних систем. На практиці дозволяє проводити дослідження тільки у випадках, коли по найнижчим наближенням можна дати відповідь про стійкість чи нестійкість руху. Майже не придатний для уточнення критичних швидкостей, оцінки демпфірування в системі, тощо. Дозволяє досліджувати стійкість у малому при малому значенні одного чи групи параметрів в системі.

5) Метод, що ґрунтується на застосуванні одного з асимптотичних методів, придатний для будь-яких роторів і роторних систем. На практиці він дозволяє досліджувати випадки, коли по найнижчим наближенням можна дати відповідь про стійкість чи нестійкість руху. Майже не придатний для уточнення критичних швидкостей. Дозволяє оцінювати демпфірування в системі. Єдиний метод, який дозволяє досліджувати глобальну стійкість усталених рухів при малому значенні одного чи групи параметрів в системі, і вивчати перехідні процеси у системі, викликані розбігом, вибігом ротора. Потребує найбільшу серед всіх методів кількість перетворень. Тому на практиці може бути застосовний до найпростіших роторних систем у невеликій кількості випадків співвідношень між параметрами.

Порівняння методів зведено у табл. 3.1. Слід відзначити, що оцінка методів суб'єктивна, проте вона робиться по багатьом факторам, зокрема, на підставі результатів, які з допомогою різних методів одержані, загальноприйнятими оцінками методів, тощо.

Аналіз розглянутих методів показує, що тільки три останніх методи теоретично дозволяють досліджувати віброзахист і зрівноваження ротора пасивним АБП як процес, тобто як явище, яке відбувається певним чином у часі. Такі дослідження проводяться з використанням диференціальних рівнянь руху системи ротор-АБП. У подальшому будемо розглядати тільки ці методи. Пронумеруємо їх у такий спосіб:

1-й метод - ґрунтується на теорії стійкості усталених рухів нелінійних автономних систем;

2-й метод - ґрунтується на теорії стійкості періодичних рухів нелінійних автономних систем;

3-й метод - ґрунтується на асимптотичних методах.

Табл. 3.1.

Порівняння різних методів дослідження динаміки ротора з АБП

Метод→ (назва, чи на чому ґрунтується)  Для чого призначений, чи коли ефективний ↓	Інженерний	Квазістатичний	На теорії стійкості стаціонарних рухів	На теорії стійкості періодичних рухів	На асимптотичних методах
1. Ротори на ізотропних опорах	+	+	+	+	+
2. Ротори на анізотропних опорах, під час різання, тощо	+	-	-	+	+
3. Наближене визначення критичних швидкостей, умов автобалансування	+	+	+	+	+
4. Точне визначення критичних швидкостей, власних частот, коефіцієнтів демпфірування	-	-	+	-	-
5. Кількість і умови існування усталених рухів	-	+	+	+	+
6. Стійкість рухів: "М" - у малому; "Г" - глобальна; "О" - у малому для основного руху	О	М	М	М	Г/М
7. Дослідження квазіперіодичних рухів	-	-	+	+	+
8. Розташування по трудомісткості у порядку її зростання	1	2	3	4	5
9. Загальність результатів: "+" для будь-якого АБП, "-" для конкретного АБП	+	-	-	-	-
10. Дослідження перехідних процесів	-	-	±	-	+

### 3.2. Загальні задачі теоретичного дослідження і методи їх розв'язання

Зрівноважування і віброзахист ротора АБП є динамічним процесом. В загальному випадку теоретичне дослідження цього процесу полягає у побудові обґрунтованої фізичної моделі ротора і АБП, побудові за цією моделлю відповідної математичної моделі і її математичному аналізу. Виходячи з технічної сторони задачі, метою математичного аналізу є встановлення умов настання автобалансування, визначення критичних швидкостей (при переході через які автобалансування починає



відбувається чи порушується), факторів, що впливають на процес автобалансування, оцінки швидкості настання автобалансування і якості зрівноваження ротора, оцінка якості віброзахисту системи. Ці загальні задачі досліджень зібрані у табл. 3.2.

Табл. 3.2

Загальні задачі теоретичного дослідження процесів автобалансування і віброзахисту ротора АБП

№	Етап	Задачі етапу
1	Побудова фізичної моделі ротора і АБП	- виділення факторів, які будуть враховуватися при побудові моделі; - описання фізичної моделі ротора і АБП
2	Побудова математичної моделі	- вивід диференціальних рівнянь руху; - виділення розмірних параметрів, що впливають на процес; - приведення рівнянь до безрозмірного вигляду; - виділення незалежних безрозмірних параметрів, що впливають на процес; - оцінка величин безрозмірних параметрів, співвідношень між ними
3	Аналіз математичної моделі	- визначення умов настання автобалансування; - визначення критичних швидкостей; - визначення власних частот системи; - оцінка швидкості настання автобалансування; - оцінка якості зрівноваження ротора; - оцінка якості віброзахисту системи

Для фізичних моделей, у яких ротор абсолютно тверде тіло, процес автобалансування і віброзахисту описує система звичайних нелінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку. Аналіз таких рівнянь у загальному вигляді неможливий через складність математичної задачі. Тому цей процес досліджується за певною послідовністю, яка базується на фізично обґрунтованих припущеннях.

1. Теоретичне визначення умов настання автобалансування ґрунтується на наступному. Практичний досвід і досвід експериментальних досліджень показує, що з часом рух системи ротор-АБП встановлюється. При цьому спостерігаються два види усталених рухів.

У рухах першого типу КВ синхронно обертаються разом з ротором. У частині з них – *основних рухах* – ротор зрівноважений, якщо ємності

АБП вистачає, або найбільше зрівноважений – якщо ні. У інших – *побічних* – розбалансований.

У рухах другого типу – *квазіперіодичних* – КВ не можуть здогнати ротор і майже рівномірно обертаються відносно землі із швидкістю, близькою до резонансної [100,145,147,149,165,166]. При цьому повздовжня вісь ротора рухається по гіпоциклоїді, що утворена прямою прецесією з цією частотою і прямою нутацією з частотою обертання ротора.

Математично *умова настання автобалансування* формулюється так: - необхідно, щоб на робочому інтервалі кутових швидкостей обертання ротора при будь-якому допустимому дисбалансі принаймні один основний рух був стійким, а всі побічні – нестійкими, або не існували. Отже, дослідження процесу автобалансування, з точки зору чи настане він взагалі, математично зводиться до дослідження умов існування і стійкості різних усталених рухів.

2. Оцінка швидкості настання автобалансування складається з двох складових. Перша складова показує, як швидко розгониться ротор. Цей проміжок часу залежить від приводу і не відображає внутрішню природу автобалансування. Ми будемо вважати, що параметри приводу відомі і дозволяють зробити оцінку швидкості розгону ротора. Друга складова показує, як швидко КВ прийдуть у положення, в якому зрівноважують ротор, або як швидко КВ у це положення повернуться, якщо від нього з певних причин відхиляться. Саме ця оцінка і є предметом досліджень і встановлюється певним способом за диференціальними рівняннями руху.

3. Демпфірування певних коливань ротора АБП відбувається за рахунок певного руху КВ відносно ротора за наявності внутрішніх сил опору. За таких умов певні коливання ротора призводять до відносного руху КВ і розсіювання енергії цих коливань за рахунок сил внутрішнього опору. З фізичної точки зору можна оцінювати саму можливість захисту ротора АБП від певних вібрацій. Так, в класичних АБП, що працюють за схемою А.Феска, у силу особливостей відносного руху, КВ можуть демпфірувати кругильні і поперечні коливання ротора. Найбільш точну оцінку ефективності віброзахисту можна одержати тільки маючи дійсний закон руху ротора і АБП при дії збурень різного походження. Але можлива і попередня оцінка – за енергією, що розсіюється під час відносних коливань КВ, за силами внутрішнього тертя, тощо.

Як вказувалося у п.1 цього розділу, за наявними матеріалами, динаміка пасивних АБП досліджувалася трьома різними методами, які ґрунтуються на: теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем – перший метод; теорії стійкості періодичних рухів нелінійних неавтономних систем – другий метод; асимптотичних методах – третій метод.

Основні особливості реалізації цих методів наступні.

Перший метод. Якщо застосувати рухому систему координат, яка обертається разом з ротором, то динаміку системи буде описувати система звичайних автономних диференціальних рівнянь другого порядку. Стаціонарні розв'язки цієї системи визначатимуть різні усталені рухи системи ротор-АБП, у яких КВ обертаються синхронно з ротором. Тому стійкість усталених рухів вивчатиметься з застосуванням теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем.

Другий метод. Якщо застосувати нерухому систему координат, то динаміку системи буде описувати система звичайних нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку. Періодичні розв'язки цієї системи визначатимуть різні усталені рухи системи ротор-АБП, у яких КВ синхронно обертаються разом з ротором. Тому стійкість усталених рухів вивчатиметься з застосуванням теорії стійкості періодичних рухів нелінійних неавтономних систем.

Третій метод. Він полягає у виділенні малого параметру і наближеному інтегруванні диференціальних рівнянь руху із застосуванням асимптотичного методу. Подальше дослідження процесу полягає у аналізі одержаного наближеного розв'язку.

Слід зауважити, що перші два методи дозволяють дослідити стійкість у малому – при невеликих відхиленнях від незбуреного руху, а третій метод – глобальну стійкість при малому значенні одного з параметрів, але за умови, що наближений розв'язок диференціальних рівнянь руху досліджувався без подальших припущень щодо малості відхилень дійсного руху від певного усталеного. Перший метод, на відміну від двох останніх, незастосовний для роторів на анізотропних опорах, але для роторів на ізотропних опорах він виявився найбільш продуктивним. Це пов'язано з тим, що математично найбільш розробленою (з трьох згаданих теорій) є теорія стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем. До того ж другий і третій методи ефективні, коли вже за першим наближенням можна зробити висновки про асимптотичну стійкість чи нестійкість всіх усталених рухів. Одержання розв'язків у наступних наближеннях цими методами є трудомістка задача, яка за складністю може наближуватися до вихідної задачі.

Узагальнення явища автобалансування і віброзахисту ротора АБП з твердими КВ і погляд на ці АБП, як на сукупність АТТ з нерухомою точкою на повздовжній осі ротора, дає можливість створити єдиний підхід до реалізації перших двох задач досліджень, який є спільним для трьох згаданих методів.

### 3.3. Етапи, які можуть бути спільними для різних методів

Спільними для трьох методів дослідження динаміки системи ротор-АБП можуть бути - вивід диференціальних рівнянь руху системи, і їх приведення до безрозмірного вигляду.

**1. Вивід диференціальних рівнянь руху системи ротор-АБП.** Будемо розглядати АБП як сукупність КВ у вигляді абсолютно твердих тіл з нерухомими точками на осі вала ротора. Тому для складання диференціальних рівнянь руху системи зручно використовувати загальні теореми динаміки. Диференціальні рівняння, які одержуються із застосуванням теорем до КВ, умовно називатимемо *диференціальними рівняннями руху КВ*. Диференціальні рівняння, які одержуються із застосуванням теорем до ротора, чи системи ротор-АБП умовно називатимемо *диференціальними рівняннями руху ротора*. Наведемо послідовність одержання таких рівнянь.

**1.1. Вивід диференціальних рівнянь руху КВ.** Для складання рівнянь динаміки КВ використовуємо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної системи. Розглянемо це на прикладі одного КВ, який обертається навколо точки  $K$  на осі вала ротора. За рухомі приймемо прямокутні осі  $K\xi\eta\zeta$ , які виходять з точки  $K$ . Тоді теорема має вигляд [234,244]:

$$\frac{d\mathbf{L}_K}{dt} + \vec{\omega}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{L}_K + \mathbf{l}_G \times m\mathbf{a}_K = \mathbf{M}_K^{(e)}, \quad \mathbf{L}_K = \vec{\omega} \tilde{\mathbf{I}}, \quad (3.1)$$

де всі об'єкти у векторно-матричному рівнянні (3.1) визначаються відносно рухомих осей  $K\xi\eta\zeta$ , і:  $\mathbf{L}_K$  - момент кількості руху КВ відносно точки підвісу,  $d\mathbf{L}_K/dt$  - його похідна в рухомій системі координат  $K\xi\eta\zeta$ ;  $\vec{\omega}$  - абсолютна швидкість обертання КВ;  $\vec{\omega}_{\xi\eta\zeta}$  - кутова швидкість обертання рухомих осей  $K\xi\eta\zeta$ ;  $\mathbf{M}_K^{(e)}$  - головний момент зовнішніх сил, що діють на КВ, знайдений відносно точки  $K$ ;  $\mathbf{a}_K$  - абсолютне прискорення точки підвісу КВ;  $m$  - маса КВ;  $\tilde{\mathbf{I}}$  - тензор інерції КВ відносно точки  $K$ ;  $\mathbf{l}_G$  - радіус-вектор, що виходить з точки  $K$  і закінчується у центрі мас КВ.

Нехай під час руху КВ обертається навколо певних осей, що проходять через точку  $K$ . Загальна кількість таких осей  $s$  - від однієї до трьох. Спрямуємо вздовж них одиничні вектори  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = \overline{1, s}$ . Тоді диференціальні рівняння руху КВ мають вигляд:

$$\left( \frac{d\mathbf{L}_K}{dt} + \vec{\omega}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{L}_K + \mathbf{l}_G \times m\mathbf{a}_K \right) \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{M}_K^{(e)} \cdot \mathbf{u}_i, \quad i = \overline{1, s}. \quad (3.2)$$

Якщо АБП утворюють  $n$  КВ, що обертаються навколо точок  $K_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  і КВ номер  $j$  обертається навколо  $s_j \leq 3$  осей, то диференціальні рівняння руху КВ матимуть вигляд:

$$\left( \frac{d\mathbf{L}_{K_j}}{dt} + \vec{\omega}_{\xi_j \eta_j \zeta_j} \times \mathbf{L}_{K_j} + \mathbf{l}_{G_j} \times m_j \mathbf{a}_{K_j} \right) \cdot \mathbf{u}_{i_j} = \mathbf{M}_{K_j}^{(e)} \cdot \mathbf{u}_{i_j},$$

$$/ j = \overline{1, n}; \quad i_j = \overline{1, s_j} /. \quad (3.3)$$

Зміст позначень у рівнянні (3.3) такий же, як в рівняннях (3.1) і (3.2), тільки індекс  $j$  вказує, що позначення відносяться до КВ з цим номером. Загальна кількість диференціальних рівнянь руху КВ

$$N = \sum_{j=1}^n s_j. \quad (3.4)$$

**1.2. Вивід диференціальних рівнянь руху ротора.** З часом рух системи ротор-АБП встановиться і вона почне обертатися навколо певної осі. Навколо цієї осі обертається і зрівноважений ротор. Спрямуємо вздовж цієї осі вісь  $Z$  прямокутної декартової системи координат  $OXYZ$ . Початок осей – точка  $O$  визначається в залежності від моделі ротора і по можливості так, щоб відносно неї опорні реакції не утворювали моментів.

1. Для моделі ротора, який здійснює плоскопаралельний рух паралельно площині  $OXY$ , вибір початку осей - точки  $O$  на осі  $Z$  не має принципового значення, але іноді його зручно брати у площині статичного дисбалансу ротора. Для одержання перших двох диференціальних рівнянь руху ротора застосовуємо теорему про рух центра мас матеріальної системи у вигляді [234,244]:

$$M_{\Sigma} \left[ \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} + \vec{\varepsilon}_{xyz} \times \mathbf{r}_C + \vec{\omega}_{xyz} \times (\vec{\omega}_{xyz} \times \mathbf{r}_C) + 2\vec{\omega}_{xyz} \times \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \right] = \mathbf{R}^{(e)}. \quad (3.5)$$

де всі об'єкти у векторно-матричному рівнянні (3.5) визначаються відносно рухомих осей  $OXYZ$ , і:  $M_{\Sigma}$  - сумарна маса системи;  $\mathbf{r}_C$  - радіус-вектор центра мас системи,  $d\mathbf{r}_C/dt$ ,  $d^2\mathbf{r}_C/dt^2$  - його перша і друга похідні відносно осей  $OXYZ$ ;  $\vec{\omega}_{xyz}$ ,  $\vec{\varepsilon}_{xyz}$  - кутові швидкість і прискорення обертання осей  $OXYZ$ ;  $\mathbf{R}^{(e)}$  - головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему.

Якщо вздовж координатних осей спрямовані одиничні вектори  $\mathbf{e}_i$ ,  $/i = \overline{1,3}/$ , то теорема (3.5) дасть два скалярних диференціальних рівняння руху ротора:

$$M_{\Sigma} \left[ \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} + \vec{\varepsilon}_{xyz} \times \mathbf{r}_C + \vec{\omega}_{xyz} \times (\vec{\omega}_{xyz} \times \mathbf{r}_C) + 2\vec{\omega}_{xyz} \times \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \right] \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{R}^{(e)} \cdot \mathbf{e}_i, \quad /i = \overline{1,2}/. \quad (3.6)$$

Останнє диференціальне рівняння руху ротора одержимо із застосуванням теореми про зміну моменту кількості руху матеріальної системи у вигляді [234,244]:

$$d\mathbf{L}_{O\Sigma}/dt + \bar{\omega}_{xyz} \times \mathbf{L}_{O\Sigma} = \mathbf{M}_O^{(e)}, \quad (3.7)$$

де всі об'єкти у векторно-матричному рівнянні (3.7) визначаються відносно рухомих осей  $OXYZ$ , і:  $\mathbf{L}_{O\Sigma}$  - момент кількості руху системи відносно точки  $O$ ,  $d\mathbf{L}_{O\Sigma}/dt$  - його похідна в рухомій системі координат  $OXYZ$ ;  $\bar{\omega}_{xyz}$  - кутова швидкість обертання рухомих осей  $OXYZ$ ;  $\mathbf{M}_O^{(e)}$  - головний момент зовнішніх сил, що діють на систему, знайдений відносно точки  $O$ .

Теорема дає наступне диференціальне рівняння руху ротора:

$$\left( \frac{d\mathbf{L}_{O\Sigma}}{dt} + \bar{\omega}_{xyz} \times \mathbf{L}_{O\Sigma} \right) \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{M}_O^{(e)} \cdot \mathbf{e}_3. \quad (3.8)$$

2. Для моделі ротора з нерухою точкою (гіроскопа) початок осей  $OXYZ$  беремо у нерухомій точці ротора. Для одержання диференціальних рівнянь руху ротора застосовуємо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної системи у вигляді (3.7). В проєкціях на координатні осі  $OXYZ$  теорема дає три скалярних диференціальних рівняння:

$$\left( \frac{d\mathbf{L}_{O\Sigma}}{dt} + \bar{\omega}_{xyz} \times \mathbf{L}_{O\Sigma} \right) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{M}_O^{(e)} \cdot \mathbf{e}_i, \quad /i = \overline{1,3}/. \quad (3.9)$$

3. Для моделі ротора, в якій ротор здійснює як поступальні, так і обертальні навколо поперечних осей рухи, початок осей  $OXYZ$  по можливості треба брати так, щоб відносно нього реакції опор не утворювали моменти. Для одержання диференціальних рівнянь руху ротора застосовуємо теорему про рух центра мас (3.6) і про зміну моменту кількості руху матеріальної системи (3.7). В проєкціях на координатні осі  $OXYZ$  теорему дають до шести скалярних диференціальних рівнянь:

$$M_\Sigma \left[ \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} + \bar{\varepsilon}_{xyz} \times \mathbf{r}_C + \bar{\omega}_{xyz} \times (\bar{\omega}_{xyz} \times \mathbf{r}_C) + 2\bar{\omega}_{xyz} \times \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \right] \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{R}^{(e)} \cdot \mathbf{e}_i, \quad /i = 1,2,(3)/, \quad (3.10)$$

$$\left( \frac{d\mathbf{L}_{O\Sigma}}{dt} + \bar{\omega}_{xyz} \times \mathbf{L}_{O\Sigma} \right) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{M}_O^{(e)} \cdot \mathbf{e}_i, \quad /i = \overline{1,3}/. \quad (3.11)$$

Слід зауважити, що:

- диференціальні рівняння руху ротора і КВ можна складати як по відношенню до рухомих, так і нерухомих осей;

- для моделей ротора, в яких він обертається із сталою кутовою швидкістю, зникає одне диференціальне рівняння руху ротора – рівняння моментів відносно осі Z;
- в деяких моделях ротора, в яких він рухається як поступально, так і обертально навколо поперечних осей, рухами ротора вздовж осі Z можна знехтувати і можна відкинути відповідне рівняння проєкцій.

Наведена послідовність складання диференціальних рівнянь найбільш ефективна для так званих класичних АБП – маятникових, кульових, якщо кулі вважати матеріальними точками і будь-яких некласичних АБП.

**2. Приведення диференціальних рівнянь руху до безрозмірного вигляду** починається з введення безрозмірних змінних [243]. Кути, що визначають положення ротора і КВ відносно нього вже безрозмірні, тому треба вводити такі безрозмірні змінні:

$$\bar{t} = t/t^*, \quad \bar{\mathbf{r}}_C = \mathbf{r}_C/r_C^*, \quad \bar{\omega} = \omega/\omega^*, \quad (3.12)$$

де  $\bar{t}$  - безрозмірний час,  $t^*$  - характерний проміжок часу;  $\bar{\mathbf{r}}_C$  - безрозмірне переміщення центра мас системи,  $r_C^*$  - характерне переміщення центра мас системи;  $\bar{\omega}$  - безрозмірна кутова швидкість обертання ротора навколо осі обертання,  $\omega^*$  - характерна кутова швидкість обертання ротора навколо осі обертання. Безрозмірне переміщення  $\bar{\mathbf{r}}_C$  вводиться для ротора, що рухається плоскопаралельно, або поступально і обертально навколо поперечних осей.

Після введення безрозмірних змінних виділяються безрозмірні параметри, що описують динаміку системи. Такі параметри є комбінацією вихідних параметрів і характерних величин. Їх кількість повинна бути мінімальною, тобто всі безрозмірні змінні повинні бути незалежними.

Приведення диференціальних рівнянь до безрозмірного вигляду дає такі основні переваги при проведенні подальших досліджень.

1) Оскільки розмірні параметри замінюються мінімальною кількістю безрозмірних, то зменшується кількість параметрів системи, спрощується вигляд диференціальних рівнянь руху системи. Оскільки безрозмірні параметри утворюються певною комбінацією розмірних, то з'являється можливість оцінити, як і у якій комбінації з іншими параметрами певний розмірний параметр впливає на динаміку системи.

2) Стає застосовною теорія подібності. Це дає можливість:

- теоретично досліджувати певну узагальнену безрозмірну систему і розповсюджувати результати досліджень на будь-яку конкретну систему, за умови, що її диференціальні рівняння руху у безрозмірному вигляді мають подібний вигляд (наприклад: одночасне дослідження динаміки всіх класичних АБП, що працюють за схемою А.Феска -

реалізовано у роботах [143-148]; використання результатів досліджень одних типів пасивних АБП при дослідженні інших типів - реалізовано у роботах [143,146], тощо);

- замість експериментального дослідження динаміки одних систем, проводити дослідження математично подібних систем, які мають більш просту конструкцію і вартість;
- результати експериментальних досліджень, проведених для одного типу АБП при зрівноваженні конкретного ротора, розповсюджувати на інші АБП і ротори, за умови математичної подібності їх моделей.

3) Обґрунтоване виділення малих і великих безрозмірних параметрів у низці важливих з точки зору практики випадках. Такими випадками зокрема є: малі сили опору в системі; коли маса КВ набагато менша маси ротора; швидкого обертання ротора; великих сил внутрішнього опору; великих сил зовнішнього опору, та інші.

### **3.4. Особливості реалізації методу, який ґрунтується на теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем**

**1. Використання осей, що обертаються навколо осі обертання синхронно з ротором.** Нехай опори ротора ізотропні. Тоді, якщо осі  $OXYZ$  і  $K_j\xi_j\eta_j\zeta_j$ ,  $/j=\overline{1,n}/$  обертаються синхронно з ротором навколо осі  $Z$ , і положення КВ визначаються кутами відносно ротора, то диференціальні рівняння руху КВ і ротора є системою звичайних автономних диференціальних рівнянь другого порядку. У подальшому вважаємо, що ці припущення мають місце і саме такими рівняннями описується динаміка АБП.

**2. Аналіз усталених рухів системи.** Рівняння усталених рухів системи ротор-АБП одержуються з диференціальних рівнянь руху при підстановці сталих залежних змінних – кутів поворотів КВ, відхилень вала від осі обертання, сталої кутової швидкості обертання ротора. Це є система нелінійних алгебраїчних рівнянь. Її розв'язки визначають усталені рухи системи.

Усталені рухи зручно розрізняти за положенням КВ відносно ротора. Якщо ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора, то в основних рухах КВ знаходяться в такому положенні, що зрівноважують ротор, а в побічних - ні. Якщо ємності не вистачає, то в основному русі, на відміну від побічних, КВ найбільше зрівноважують ротор. Аналіз робіт [9, 10] показує, що для дослідження кількості і умов існування усталених рухів зручно застосовувати графоаналітичний метод. За його допомогою вперше встановлено, що деякі побічні рухи не існують в околі резонансної кутової швидкості обертання ротора і це викликано впливом сил в'язкого опору в опорах.



**3. Визначення умов настання автобалансування і критичних швидкостей.** Умови настання автобалансування визначаються через дослідження стійкості за першим методом Ляпунова. Це дослідження має такі особливості:

1) при складанні характеристичних рівнянь застосовується метод комплексного псевдозгортання, який дозволяє збільшити кількість нульових елементів у характеристичному визначнику і цим спрощує процес його розкриття для одержання характеристичного рівняння у явному вигляді;

2) за допомогою наслідків з теорем Віста встановлюються необхідні умови стійкості і достатні умови нестійкості різних усталених рухів;

3) корені характеристичного рівняння визначаються у ряді граничних випадків, шляхом їх розкладання за степенями малого параметра, і потім за дійсними частинами коренів визначаються достатні умови стійкості чи нестійкості різних усталених рухів;

4) малі параметри виділяються у ряді важливих з точки зору практики випадках, що робить дослідження стійкості більш всебічними.

Слід зауважити, що характеристичне рівняння навіть для системи, що має чотири степені вільності, є поліном восьмого степеня, який залежить від багатьох параметрів. Застосування до таких поліномів відомих критеріїв стійкості, наприклад Рауса-Гурвіца, така ж складна задача, як і визначення коренів характеристичного рівняння у загальному вигляді. Тому і потрібне наближене визначення коренів.

Критичні швидкості визначаються межами областей стійкості. Вони визначаються за характеристичним рівнянням, складеним для основного руху. При обертанні ротора з критичними швидкостями у характеристичному рівнянні з'являється нульовий корінь, або пара уявних комплексно спряжених коренів. З цих алгебраїчних умов і визначаються критичні швидкості. Але ця задача більш складна за задачу визначення коренів характеристичного рівняння. Тому вона також розв'язується наближено за допомогою методу розкладання розв'язків алгебраїчних рівнянь за степенями малого параметра.

**4. Оцінка швидкості настання автобалансування і якості демпфірування коливань ротора.** Оскільки неможливо одержати загальні розв'язки диференціальних рівнянь руху і дати за ними оцінку перехідних процесів, то будемо робити цю оцінку опосередковано, за допомогою рівнянь першого наближення, складених для основних рухів, а саме за дійсними частинами коренів характеристичного рівняння. Оскільки основний рух стійкий, то дійсні частини – від'ємні. Швидкість згасання перехідних процесів можна оцінювати за найменшою за модулем дійсною частиною коренів.

Оцінювати ефективність віброзахисту системи можна також за дійсними частинами коренів характеристичного рівняння, складеного для основних рухів. Саме ці складові зменшують амплітуду вимушених коливань ротора, викликаних збуреннями різного походження і відповідають за розсіювання енергії коливань.

### Висновки розділу 3

1. Зрівноважування і віброзахист ротора АБП є динамічним процесом. В загальному випадку теоретичне дослідження цього процесу полягає у побудові обґрунтованої фізичної моделі ротора і АБП, побудові за цією моделлю відповідної математичної моделі і її математичному аналізі. Виходячи з технічної сторони задачі метою математичного аналізу є встановлення умов настання автобалансування, визначення критичних швидкостей (при переході через які автобалансування починає відбуватися чи порушується), факторів, що впливають на процес автобалансування, оцінки швидкості настання автобалансування і якості зрівноваження ротора, оцінка якості віброзахисту системи.

2. Динаміка пасивних АБП досліджувалася трьома різними методами, які ґрунтуються на: теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем – перший метод; теорії стійкості періодичних рухів нелінійних неавтономних систем – другий метод; асимптотичних методах – третій метод.

3. Спільними етапами цих методів є вивід диференціальних рівнянь руху і їх приведення до безрозмірного вигляду. Для виводу диференціальних рівнянь руху ротора і АБП зручно застосовувати загальні теореми динаміки і матрично-векторний метод складання цих рівнянь.

4. У випадку ротора на ізотропних опорах найбільшу глибину досліджень забезпечує метод, який ґрунтується на теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем і який стає ефективним за умов застосування: системи координат, що синхронно обертається з ротором; графоаналітичного методу дослідження усталених рухів системи ротор-АБП; методики комплексного псевдозгортання; методу розкладання коренів алгебраїчних рівнянь за степенями малого параметра. Метод дозволяє розв'язати всі основні задачі дослідження динаміки системи ротор-АБП.

## РОЗДІЛ 4. ЗАДАЧІ І МЕТОДИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ЗРІВНОВАЖЕННЯ І ВІБРОЗАХИСТУ РОТОРІВ ПАСИВНИМИ АБП

### 4.1. Огляд наукових праць з експериментального дослідження

Експериментальному дослідженню динаміки пасивних АБП присвячені роботи А.І.Артюніна [64], В.І.Кравченка [70,84], Г.Б.Філімоніхіна [149,164], Ю.А.Невдахи, Г.Б.Філімоніхіна [100], В.С.Сотнікова, Г.Б.Філімоніхіна [134], С.Н.Кладієва [180], В.П.Нестеренка [103,104], Л.А.Пашкової [181], В.П.Ройзмана, І.В.Борко, О.В.Малигіна, Р.Г.Чоловського [193], В.П.Ройзмана, О.В.Малигіна, Р.Г.Чоловського [190], Р.Г.Чоловського, Р.Г.Чоловського [189], О.О.Нікітіна [195,196], D.W.Kim, O.H.Kwon, S.Moon.Jeon [187], S.Suzuk [199], і інших вчених.

Деякі результати експериментальних досліджень описуються в книгах і монографіях А.А.Гусарова, В.І.Сусаніна, Л.Н.Шаталова, Б.Н.Грушина [7], А.А.Гусарова [8], Ю.С.Рейбаха [184]. Зокрема, у перших двох джерелах вказується, що у кульового АБП автобалансування настає на швидкостях, дещо більших (в 1,485 рази) за теоретичну критичну. Ця швидкість названа межею стійкої роботи АБП. У книзі Ю.С.Рейбаха вказані корисні прийоми проведення експериментів: використання осцилографа - для спостереження за рухом шпинделя; використання швидкісної відеозйомки - для вивчення руху куль; розведення мастила керосином (кількісні співвідношення) - для одержання широкого діапазону в'язкості мастила. Спеціально проведеними експериментами встановлена можливість балансування на вибігу шпинделів шліфувальних верстатів навіть на жорстких опорах - за рахунок мікролюфтів, прошарку мастила, тощо.

Результати робіт, проведених автором особисто, чи за участю, наведені у монографії при викладенні результатів дослідження динаміки різних типів АБП. Нижче розглядаються роботи інших авторів.

В монографії В.П.Нестеренка [104] описуються експериментальні дослідження автоматичного балансування кулями роторів у різних роторних системах. Мета експериментів - перевірити результати теоретичних досліджень, одержаних у цій роботі.

Було перевірено існування двох областей автобалансування у ротора двохмасової системи, зображеної на рис. 2.13. Для цього була створена дослідна установка, у якій на вал двигуна насаджений маховик з кульовим АБП, двигун пружно закріплений у масивному тілі, а це тіло аналогічно прикріплене до фундаменту. Для заміру і запису коливань застосовані такі прибори. П'єзокерамічний датчик ДН-3 кріпився до

(спеціального кожуха) двигуна. Сигнал датчика подавався на вимірювальний прилад ПИ-19, з виходу якого подавався на самописець Н 338 і на частотомір - хронометр Ф 5041. Для спостереження за рухом куль застосований строботометр 2ТСТ32-456. Тарування системи вимірювання переміщень кожуха проведена з допомогою мікроскопу МИР-2 з ціною поділки 0,06 мм. За одержаними даними будувалася амплітудно-частотна характеристика. Експерименти проводилися у два етапи - для системи без куль і для системи з кулями. Було встановлено, що сили сухого тертя, що перешкоджають коченню куль, заважають послідовному виявленню областей автобалансування при неперервному зростанні чи спаданні кугової швидкості обертання ротора. Для їх виявлення прийшлося застосовувати механізми, які виводили кулі з положення, у якому вони зрівноважують ротор, якщо у цих положеннях відбувся застій.

Аналогічно було перевірено існування двох областей автобалансування при зрівноваженні двома АБП моментного дисбалансу ротора гіроскопа. На спеціально створеному стенді було встановлено, що: у горизонтально розташованого ротора автобалансування відбувається на швидкостях, що перевищують другу резонансну; у вертикально розташованого ротора автобалансування також може наставати відразу за першою резонансною швидкістю. Така розбіжність пояснюється тим, що сили ваги у горизонтально розташованому роторі заважають виявленню нижньої області автобалансування, бо на низьких швидкостях обертання ротора їх вплив на кулі ще не подоланий. Цей же стенд, після встановлення на пружні опори, був використаний для дослідження зрівноваження двома кульовими АБП ротора у просторовому русі. В цілому результати експериментів підтвердили результати теоретичних досліджень (які частково описані у інженерній теорії АБП).

У докторській дисертації В.П.Нестеренка [103] описаний також стенд для випробування однокамерного і трьохкамерного рідинного АБП. Метою експериментів було підтвердити більшу ефективність багатоканальних АБП ніж однокамерних. Випробування виявили ефективність однокамерного 1,56 проти ефективності трьохкамерного 2,47. Також у дисертації наводяться спеціальні випробування ручних шліфувальних машин. Перевірялося зменшення вібрацій на рукоятці шліфувальної машини і вплив АБП на геометрію шліфувального круга. Для різних типів ручних шліфувальних машин встановлено: зменшення рівнів вібрацій на холостому ходу на 10÷15 дБ, під час різання - на 6÷10 дБ; виправлення форми шліфувального круга, якщо вона відрізнялася від кола. Для вимірювання вібрацій застосовувалися датчики ВИП К12, сигнал з яких на попередні підсилювачі 2635 і далі на магнітофон 7005. 3

магнітофону сигнал подавався для обробки на ЕОМ. У згаданій роботі описані і деякі інші випробування.

Експерименти по випробуванню кульових АБП для зрівноваження ручних шліфувальних машин описані у кандидатських дисертаціях С.Г.Кладієва [180], Л.А.Пашкової [181]. Дослідження проводилися під науковим керівництвом В.П.Нестеренко і тому розвивають і доповнюють розпочаті ним дослідження.

У кандидатській дисертації В.І.Кравченка [70] експериментально досліджувалися процеси зрівноваження голівок піскометів однорядними і багаторядними кульовими АБП. Для цього були сконструйовані два стенди. При проведенні експериментів змінювалися: кількість куль; кількість рядів; швидкість обертання ротора. Те, що кулі займають положення, у якому зрівноважують ротор, перевірялося за допомогою стробоскопічної лампи приладу ТСТ-32. Якість зрівноваження ротора перевірялася опосередковано - заміром віброшвидкості стенда. При цьому будувалися графіки залежності віброшвидкості від швидкості обертання голівки піскомета. Встановлена оптимальна кількість куль у однорядному і багаторядному АБП, оцінена зміна віброшвидкості стенда і по ній встановлено, що АБП збільшує віброшвидкість на докритичних швидкостях обертання голівки, і зменшує на закритичних. Для однорядного кульового АБП також досліджувався вплив в'язкості мастила, у яке поміщені кулі, на зменшення віброшвидкості стенда. Встановлено, що оптимальним є застосування мастила середньої в'язкості (типу І20А).

В роботі А.І.Артюніна [64], на спеціально створеному стенді, досліджується рух горизонтально розташованого ротора з маятниками, насадженими на вал. Вперше встановлений особливий режим руху маятників, при якому вони обертаються відносно землі із швидкістю, що дорівнює одній з власних частот коливань ротора і відстають при цьому від ротора. Показано, що для подолання цього явища необхідно збільшувати сили в'язкого опору між маятниками і валом, а також доцільно до розгону маятників до швидкості обертання ротора жорстко кріпити їх до вала фіксуємим механізмом. Для спостереження за рухом маятників використовувалося стробоскопічне освітлення, а якість зрівноваження ротора оцінювалася заміром вібрацій в опорах ротора.

В роботах В.П.Ройзмана, І.В.Борко, О.В.Малигіна, Р.Г.Чоловського [193], В.П.Ройзмана, О.В.Малигіна, Р.Г.Чоловського [190], Р.Г.Чоловського, О.О.Нікітіна [195,196] і кандидатській дисертації Р.Г.Чоловського [189] спостереження за роботою експериментальної установки, на якій було встановлено АБП, показало, що, всупереч відомим положенням теорії автоматичного балансування, комбіновані АБП, створені рідиною і кулями, зменшують амплітуди коливань ротора як на докритичних та закритичних частотах обертання, так і на резонансі.

Для більш детального дослідження цього явища розроблено стенд для вивчення поведінки робочих тіл в АБП, в склад якого входять: дослідна установка з вертикальною віссю обертання на базі машини "Волга-11", макет АБП із оптично-прозорого матеріалу, віброметри ПИ-19, осцилограф ВВ-10Н, шлейфовий осцилограф Н071.4М, стробоскоп СШ-1, швидкісна відеокамера Panasonic NC-NC 1000, персональний комп'ютер IBM. Запуск відеокамери синхронізовано з включенням дослідної установки та шлейфового осцилографа. Обробка отриманих результатів здійснювалась шляхом перегляду на комп'ютері та зіставлення запису стрічок відеокамери та осцилографа. В результаті розшифровки даних отримані комп'ютерні кадри місць розташування робочих тіл на докритичних, критичних та робочих частотах обертання. Ефективність застосування комбінованого АБП оцінювалась за допомогою АЧХ коливань верхнього краю барабана, а те, що КВ займають положення, у якому зрівноважують ротор, оцінювалося по розшифровці кадрів, знятих швидкісною камерою і по стробоскопічному світлу.

Аналіз отриманих матеріалів показав, що спостерігається різниця у часі включення в роботу рідких та твердих робочих тіл, тому на етапі розгону АБП нагадує широкосмуговий динамічний гасник коливань. При умові відсутності кутового прискорення вже на частоті 1,2-1,6 Гц (70-100 об/хв.), що відповідає дорезонансній частоті коливань, робочі тіла припиняють свій рух відносно стінок АБП і встановлюються напроти дисбалансу. В ході спостережень за роботою АБП помічено, що зміна положення дисбалансу під час роботи ротора призводить до зміни положення робочих тіл. При цьому кульки швидше за рідину реагують на зміни, згладжують вібрації, викликані зміною дисбалансу, і дозрівноважують ротор. Рідина внаслідок інерційності реагує повільніше і згладжує вібрації ротора, викликані власним переміщенням кульок.

У роботі D.W.Kim, O.H.Kwon, S.Moon,Jeon [187] наводяться результати розробки і випробування кульових АБП, призначених для зрівноваження CD/DVD дисків. Динаміка системи моделюється на ПЕОМ з використанням програми DADS Rev.8.5. Експерименти також перевіряють придатність програми для моделювання. Встановлено настання автобалансування на закритичних швидкостях і добра відповідність між розрахунками і експериментом.

У роботі S.Suzuk (Samsung Electronics Co., LTD) [199] докладно описується експериментальне дослідження динаміки зрівноваження барабана вертикальної автоматичної пральної машини рідинним АБП, насадженим на верхній край барабана. Для дослідження просторового руху барабана використані три датчика, встановлені зверху, посередині і

знизу бака, усередині якого обертається барабан. При цьому було прийнято до уваги, що барабан жорстко закріплений у баці. Один з трьох датчиків - надмірний, і використовується як контрольний. Дані з датчиків підсилюються і подаються в аналізатор сигналів. За результатами вимірювань будуються амплітудно-частотні характеристики. Певні типи дисбалансів штучно створювалися пробними масами. Встановлено настання автобалансування на закритичних швидкостях обертання барабана, причому якість балансування зростає із збільшенням швидкості обертання ротора. Останнє пов'язано з тим, що сили ваги перешкоджають автобалансуванню, бо утримують рідину у нижній частині ємності. В роботі також перевірялося моделювання процесу автобалансування на ПЕОМ з використанням комерційного програмного забезпечення для аналізу динаміки (commercial dynamic analysis software) ADAMS. Результати експериментів мають розбіжність з розрахунками до 18%.

## 4.2. Задачі експериментального дослідження

Огляд літератури з експериментального дослідження динаміки АБП показує, що дослідження діляться на дві групи, які мають різну мету. Перша група спрямована на дослідження зрівноваження певним типом АБП певного узагальненого типу ротора - що здійснює плоский рух, що рухається навколо нерухомої точки, що здійснює просторовий рух, тощо. Це загальнонаукові, фундаментальні дослідження, бо мають на меті встановити найбільш загальні закономірності, що відбуваються при зрівноваженні узагальнених роторних систем. Друга група спрямована на дослідження динаміки зрівноваження пасивними АБП роторів відцентрових машин певного призначення - шпинделів верстатів, ручних шліфувальних машин, CD/DVD дисків, барабанів пральних машин, тощо. У подальшому розглядаються експериментальні дослідження першого типу.

Експериментально досліджувався процес зрівноважування ротора так званими класичними АБП – кільцевими, маятниковими і кульовими. Основна увага в цих дослідженнях приділялася часу зрівноважування ротора, величині залишкового дисбалансу, числу і величині критичних швидкостей. При цьому не дослідженими залишилися: перехідні процеси, що стосуються розгону КГ до швидкості обертання ротора; різні нестационарні усталені рухи КГ щодо ротора; стійкість нестационарних усталених рухів на всьому інтервалі зміни кутової швидкості обертання ротора. Все це призводить до необхідності визначити задачі

експериментальних досліджень, провести їх класифікацію і визначити доцільність їх проведення у різних випадках роторів.

Задачі експериментальних досліджень можна поділити на декілька груп, відповідно до того, на дослідження чого вони спрямовані. Перша група спрямована на перевірку результатів теоретичних досліджень: стійкості різних стаціонарних усталених рухів на сталих швидкостях обертання ротора; квазіперіодичних рухів; швидкості зрівноваження ротора; якості зрівноваження ротора. Решта досліджень спрямована на дослідження тих явищ, які теоретично важко дослідити. Друга група досліджень спрямована на дослідження режимів розгону і вибігу ротора. Третя група спрямована на дослідження реакцій ротора і АБП на збурення різного походження: зміну швидкості обертання ротора; удари по корпусу машини; зміну орієнтації ротора; бічний чи торцевий тиск на ротор і т.п. Задачі експериментальних досліджень зібрані у таблицю 4.1.

Слід відзначити, що перші два етапи досліджень є обов'язковими для будь якого типу роторів і відображають роботу АБП у ідеалізованих умовах. Третій етап досліджень повинен відображати специфіку роботи машини. Наприклад, якщо ротор – шпиндель шліфувального чи фрезерувального верстату, то як мінімум треба досліджувати реакцію системи на удари і бічний чи торцевий тиск на ротор. Якщо ротор – барабан сепаратора, який викидає осад без зупинки, то як мінімум треба досліджувати реакцію системи на удари, повільну і дискретну зміну дисбалансу, зміну швидкості обертання ротора.

Табл. 4.1.

Задачі експериментального дослідження динаміки ротора і АБП

№	Етап	Задачі етапу
1	Перевірка результатів теоретичних досліджень	- стійкості різних стаціонарних усталених рухів на сталих швидкостях обертання ротора; - швидкості зрівноваження ротора; - якості зрівноваження ротора.
2	Дослідження режимів розгону і вибігу ротора	- розгін ротора; - вибіг ротора.
3	Дослідження реакцій ротора і АБП на збурення різного походження	- зміну швидкості обертання ротора; - удари по корпусу машини; - зміну орієнтації ротора; - бічний чи торцевий тиск на ротор; - і т.д.



### 4.3. Універсальний стенд для дослідження динаміки АБП

#### 4.3.1. Опис стенду і вимоги до моделей АБП

Стенд призначений для експериментального дослідження динаміки пасивних АБП, призначених для статичного зрівноваження вертикально розташованих коротких роторів. Він дозволяє проводити всі типи досліджень, визначених в різних етапах табл. 4.1. Стенд виконаний на основі центрифуги машини пральної напівавтоматичної побутової, типу СМП-2Д (рис. 4.1). У корпусі 1 машини мають дві ємності 2, 3. У ємності 2 встановлене джерело спрямованого світла 4. Світло від джерела проходить через вузький прямокутний отвір 5 у корпусі машини в ємність 3. У ємності 3 встановлений ротор 6 (екстрактор центрифуги). У його корпусі так само має вузький прямокутний отвір 7. Світло через цей отвір, один раз за повний оборот ротора, попадає в середину ротора. Тому спостерігач бачить нутрощі ротора в одному положенні. Центрифугу 6 кріплять до вала 8 двигуна 9 АБП 10 (на схемі кульовий АБП), виконані у вигляді окремих балансувальних голівок, що нагвинчуються на торець вала. У корпусі АБП виконаний співосно вала ротора різбовий отвір 11, у який вкручується джерело лазерного світла 12. Включення двигуна і світла в ємності 2 здійснюється тумблерами “Двигун” і “Світло”. Керування швидкістю обертання двигуна здійснюється через блок керування двигуном (БКД) 13. В отвір 7 уставляється розсіювач світла. Оскільки центрифуга металева, то розсіяне світло багаторазово відбивається і розсіюється її поверхнею, чим створюється рівномірне освітлення.

Для вимірювань використані тахометр цифровий ЦАТ-3М і лічильник імпульсів-секундомір Elwro FPM-09, призначений для визначення частоти коливань ротора і вимірювання проміжків часу. На рис. 4.1, б наведена фотографія створеного стенду з названими пристроями.

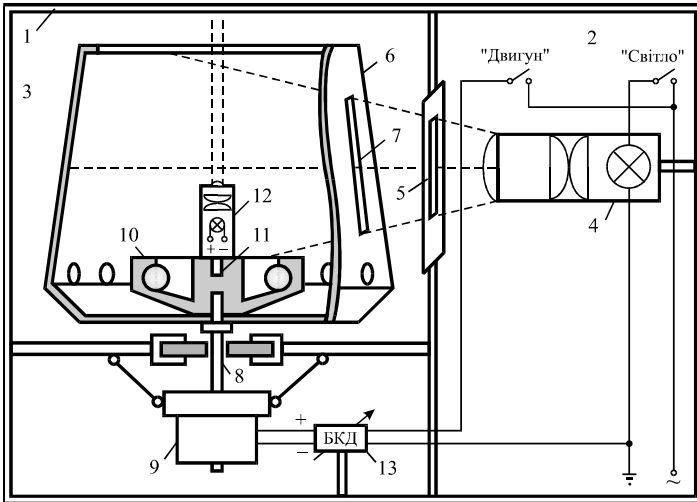
Відносний рух КВ знімався відеокамерою і передавався на ПЕОМ через плату захоплення відео AVerMedia AVerTV Studio. Рух лазерного променя на горизонтальному екрані знімався відеокамерою і цифровим фотоапаратом Olympus CAMEDIA C-1 ZOOM. Фотографія стенда у конфігурації з відеокамерою і ПЕОМ приведена на рис. 4.2.

Похибка визначення положення КГ щодо ротора

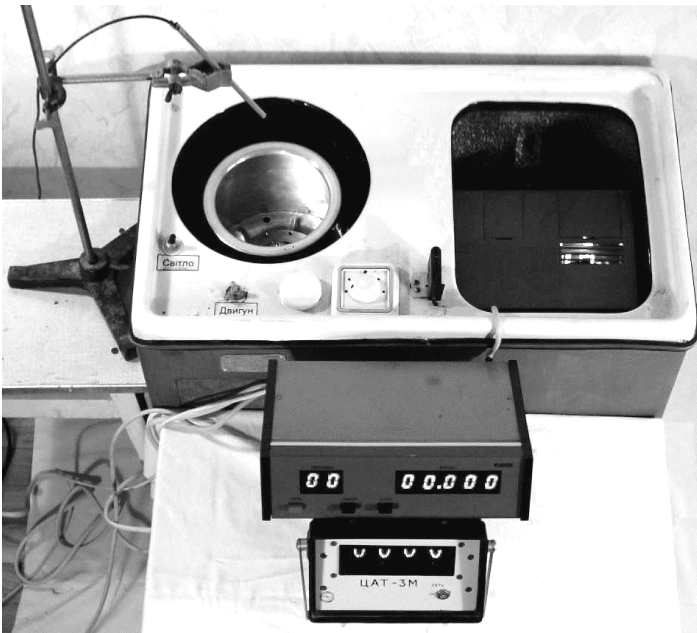
$$\eta\% = (\delta_{\max}/P_{\min}) \cdot 100\%, \quad (4.1)$$

де  $\delta_{\max}$  – найбільша ширина щілини в корпусі машини або на роторі;  $P_{\min}$  – мінімальний периметр корпусу центрифуги, обмірюваний на рівні щілини. Ця оцінка не залежить від швидкості обертання ротора.

Дійсний стенд відрізняється від стенда, описаного в роботі [189], конструкцією і призначенням і має ряд переваг. Оскільки світло подається в ротор через бічний отвір, то простір над ротором вільний для проведення відео і фотозйомок практично з будь-якого положення.



а



б

Рис. 4.1. Універсальний стенд для дослідження динаміки АБП:  
а - схема; б - фотографія (стенд, тахометр, лічильник імпульсів-секундомір)



б

Рис. 4.2. Фотографія універсального стенда в конфігурації стенд, відеокамера, ПК

Це важливо для дослідження неklasичних АБП, тому що в них рухи КГ видні тільки з деяких положень спостерігача щодо ротора, причому ці положення міняються в залежності від величини і напрямку вектора дисбалансу. Похибка спостережень не залежить від швидкості обертання ротора і визначається за формулою, приведеною вище. Цю похибку можна значно зменшити, зменшуючи величину  $\delta_{\max}$ . Стенд універсальний, тому що дозволяє спостерігати процес роботи будь-якого пасивного АБП з твердими коригувальними вантажами, виконаного у виді планшайби, що нагвинчується на вал.

Дослідна модель АБП виконується у вигляді окремої балансувальної голівки, яка нагвинчується на вал і кріпить собою центрифугу до валу. АБП повинен мати ємність, яка приблизно у два рази менша за

найменший дисбаланс, при якому ротор починає бити по корпусу машини. Це дасть можливість вивчати зрівноваження АБП дисбалансів, які як не перевищують, так і перевищують (до 2-х разів) його балансувальну ємність. У корпусі моделі АБП, співосно вала повинен бути (різьбовий) отвір для кріплення джерела лазерного світла. За виконанням названих вимог стенд дозволяє досліджувати динаміку різних моделей АБП з мінімальним попереднім налагодженням.

### **4.3.2. Методика підготовки до проведення експериментів**

Для проведення експериментів модель АБП, динаміка якого вивчається, нагвинчується на вал. На корпус АБП нагвинчується джерело лазерного світла. Подальші дії попереджують експериментам і спрямовані на статичне і динамічне центрування лазерного променя, перевірку якості виконання АБП, тарування дисбалансів за відхиленнями лазерного променя, визначення резонансної частоти - частоти власних коливань ротора.

1. Методика попереднього балансування ротора і центрування променя.

1.1. Статичне центрування лазерного променя. АБП без КВ фіксується центрифуга на валу ротора. У корпус АБП вкручується джерело лазерного світла. Його промінь падає точкою на екран. Повертаючи центрифугу з кроком у  $90^0$ , визначають і усувають неспіввісність вала ротора і лазерного променя. Для регулювання нахилу променя в корпусі джерела лазерного світла мають чотири болти, розташовані один напроти іншого. При якісному центруванні лазерний промінь вказує в одну точку, поза залежністю від кута повороту центрифуги.

1.2. Динамічне центрування лазерного променя. Воно зв'язано з балансуванням ротора і полягає в наступному. При включеному двигуні (дисбаланс і КВ відсутні) лазерний промінь повинний показувати в одну точку. Якщо цього не відбувається (промінь описує практично правильне коло на екрані), то ротор розбалансований.

Для визначення дисбалансу і балансування ротора розроблений спосіб, що ґрунтується на використанні лазерного променя, спрямованого по повздовжній осі ротора [150]. Спосіб використовує те, що на фіксованій швидкості обертання ротора рух ротора з часом встановлюється і його повздовжня вісь починає здійснювати рух, який є сумою циліндричної і конічної прецесій. Величини цих складових пропорційні дисбалансам ротора. Балансування ротора можна здійснювати, визначивши закон прецесії повздовжньої осі ротора. Закон прецесії цілком визначається швидкістю обертання ротора і положенням повздовжньої осі ротора у просторі при певному фіксованому куті

повороту ротора відносно землі. Для визначення положення повздовжньої осі запропоновано використовувати (лазерний) промінь, спрямований по повздовжній осі ротора і екран, площина якого перпендикулярна осі обертання ротора.

Положення повздовжньої осі цілком визначається двома точками. Першу задачу, яку треба вирішити, це - визначити положення точки лазерного променя на екрані у момент, коли ротор повернутий відносно землі на певний кут. Це можна зробити такими способами: блоком синхронного вмикання лазерного променя в момент, коли ротор повертається відносно землі на фіксований кут; розташуванням перед екраном поляризованого фільтру; розташуванням перед екраном щита з вузькою прямою щілиною, яка починається від осі обертання ротора і використанням поляризованого фільтру; миттєвим зніманням координат точки на екрані в момент, коли ротор повернутий відносно землі на певний кут.

Другу задачу, яку треба вирішити, це визначити координати двох точок повздовжньої осі ротора. Це можна зробити такими способами: екрану надається можливість рухатися вздовж осі обертання ротора; на шляху лазерного променя встановлюються два екрани, перший з яких виконаний з напівпрозорого матеріалу, через який промінь частково проходить до другого екрану; по осі вала ротора спрямовується другий лазерний промінь, спрямований у протилежний бік по відношенню до першого променя і з його боку встановлюється другий екран.

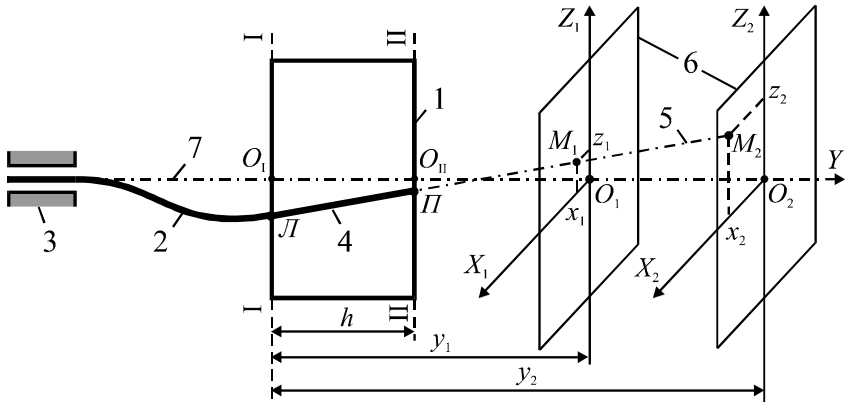
При нерухомому екрані спосіб може бути використаний для статичного зрівноваження ротора у одній площині корекції. При рухомому екрані, або двох екранах спосіб дозволяє зрівноважувати повний дисбаланс ротора у двох площинах корекції.

Спосіб найпростіше реалізується, коли ротор обертається з великими закритичними швидкостями. Тоді настає явище самоцентрування, у наслідку якого головна центральна вісь ротора майже співпадає з віссю обертання ротора. При цьому повздовжня вісь ротора відхиляється у легкий бік ротора. За цим відхиленням і можна визначити величини КВ і місця їх встановлення.

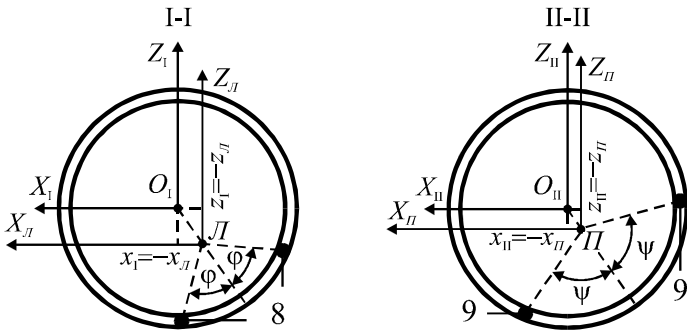
Розглянемо приклади застосування способу.

Приклад 1. На рис. 4.3 ілюструється здійснення способу при зрівноваженні консольного ротора.

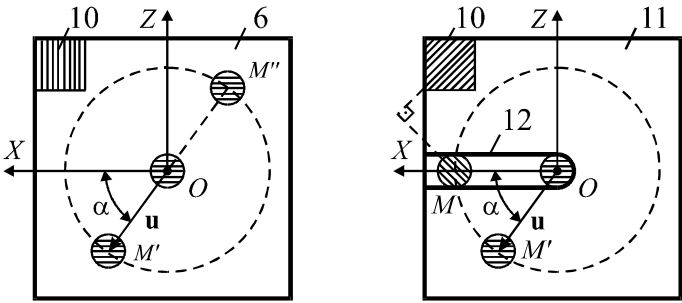
На рис. 4.3, а горизонтальний ротор 1 насаджений на гнучкий вал 2, який утримує опора 3. По осі 4 вала ротора спрямований лазерний промінь 5. При нерухомому роторі вал 2 недеформований і промінь 5 падає точкою  $O_{1(2)}$  на вертикальний екран 6, площина якого перпендикулярна осі обертання ротора 7 і який може рухатись вздовж цієї осі.



a



б



в

г

Рис. 4.3. Спосіб балансування ротора з допомогою (лазерного) променя

Блок синхронного вмикання лазерного променя (на схемі не показаний) вмикає лазерний промінь у момент, коли ротор повернутий відносно землі на певний кут. На екрані нанесена координатна сітка – система координат  $O_{1(2)}X_{1(2)}Z_{1(2)}$  із центром у точці  $O_{1(2)}$  (можливе використання і іншої, наприклад полярної системи координат).

Спосіб здійснюється наступним чином. Ротору 1 надається закритична швидкість обертання. У наслідку явища самоцентрування головна центральна вісь ротора фактично співпадає з віссю обертання ротора 7, а вісь вала ротора 4 обертається разом з ротором як одне ціле. Положення осі вала ротора 4 у просторі по відношенню до ротора, повернутого на певний кут відносно землі, визначається координатами двох точок у просторі, які утворюються при падінні лазерного променя на екран, послідовно встановлений на двох різних відстанях  $y_1, y_2$ . Якщо координати цих точок  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то рівняння осі вала ротора матиме вигляд

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y - y_1), \quad y \in (0, h), \quad z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1}(y - y_1). \quad (4.2)$$

За допомогою цього рівняння визначаються координати точок  $O_I, O_{II}$ , в яких головна центральна вісь ротора перетинає площини корекції I-I, II-II, які співпадають з торцями ротора:

$$O_I \left( -x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_1, 0, -z_1 + \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1} y_1 \right)^T, \\ O_{II} \left( -x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} (h - y_1), h, -z_1 - \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1} (h - y_1) \right)^T, \quad (4.3)$$

де:  $h$  – довжина ротора;  $x_{1,2}, y_{1,2}$  – координати точки променя, визначені відносно осей  $X_{II}, Z_{II}$  і  $X_I, Z_I$ , що починаються на осі вала ротора і паралельні осям  $X_{1(2)}, Z_{1(2)}$  для положення ротора, коли він повернутий відносно землі на певний кут.

На рис. 4.3, б показано розташування двох пар КМ 8 і 9 в площинах корекції I-I і II-II відповідно. Кути  $\varphi, \psi$  розраховуються або підбираються методом послідовних спроб, для чого ротор перезапускається певну кількість разів. При повному зрівноваженні ротора лазерний промінь буде вказувати в точку  $O$  екрана при будь-якому його віддаленні від ротора.

Приклад 2. В другому прикладі, на відміну від першого, замість блоку синхронного вмикання лазерного променя використовується поляризований фільтр 10, який встановлюється перед екраном 6 (рис. 4.3, в).

Спосіб реалізується так. Ротор повертається навколо осі обертання і фіксується такий його кут повороту, при якому зникає точка  $O$  лазерного

променя на екрані. Відносно цього положення ротора і визначатимуться напрямки векторів дисбалансів у двох площинах корекції. Для цього ротору надається обертання з зарезонансною кутовою швидкістю. Внаслідок дисбалансу точка лазерного променя  $O$  відхилиться від осі обертання  $7$  на вектор  $\mathbf{u}$ , і перейде у точку  $M'$ , яка потім буде обертатися навколо центра  $O$ . При обертанні буде змінюватися напрям поляризації точки  $M'$ , внаслідок чого на екрані з'явиться світле коло радіуса  $u$ , яке буде мати на своєму діаметрі дві темні точки  $M', M''$ . Одна з цих темних точок, нехай  $M'$ , і використовується для визначення напрямків векторів дисбалансів у площинах корекції I-I і II-II, так само, як точка  $M$  лазерного променя у прикладі 1. На відміну від попереднього прикладу, такий спосіб дозволяє знайти напрямки векторів дисбалансів з точністю до повороту на  $180^\circ$ . Тому коригувальні маси встановлюються спочатку для одного напрямку, а потім його вірність перевіряється пробним запуском ротора.

Приклад 3. В третьому прикладі, на відміну від другого, на шляху лазерного променя  $5$  перед екраном  $6$  встановлюється щит  $11$ , який має вузьку щілину  $12$ , яка починається від осі обертання ротора  $7$  (див. рис. 4.3, г).

Спосіб реалізується як і в прикладі 1, а саме: внаслідок дисбалансу лазерний промінь відхиляється від осі обертання ротора і обертається навколо неї. Тому промінь один раз за повний оберт ротора буде проходити через щілину щита. За координатами двох точок  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  на екрані, послідовно встановленому на двох різних відстанях від ротора, визначаються напрямки векторів дисбалансів у двох площинах корекції I-I, II-II. Але невідомим залишається положення ротора відносно землі, для якого напрямки цих векторів визначені. Тому перед екраном встановлюють поляризований фільтр  $10$  і обертають його до повного зникнення точки з екрану. Потім зупиняють ротор і далі шукають такий його кут повороту, при якому точка з екрану зникне. Відносно цього положення ротора, або ротора, повернутого на  $180^\circ$ , і визначені напрямки векторів дисбалансів у двох площинах корекції. Дійсні напрямки векторів дисбалансів визначаються як і в прикладі 2 – пробним встановленням КМ з наступним перезапуском ротора для перевірки правильності вибраних напрямків.

Таким чином, використання щита з щілиною дозволяє визначити напрямки векторів дисбалансів у двох площинах корекції ротора, але не саме положення ротора відносно землі, для якого ці напрямки знайдені. Положення ротора із точністю до повороту на  $180^\circ$  визначається за допомогою поляризованого фільтру.

Приклад 4. У прикладі 4 використовується звичайний екран з напівпрозорого матеріалу, такий, що з його протилежного боку видно



точку від лазерного променя. За екраном встановлюється цифрова фотокамера, що має оптичне збільшення. Положення точки на екрані фотографується у момент, коли ротор повернутий відносно землі на певний кут. Великі дисбаланси урівноважуються без оптичного збільшення, а малі із збільшенням, що підвищує точність балансування. Величини і місця розташування КМ у площинах корекції можна розраховувати з допомогою ПЕОМ.

Спосіб можна реалізувати і на докритичних швидкостях обертання ротора. В цьому випадку використовується те, що напрямки відхилення осі вала ротора від осі обертання майже співпадають з напрямками дисбалансів. Тому коригувальні вантажі у площинах корекції I-I і II-II треба виставляти з протилежного боку, по відношенню до положень, вказаних на рис. 4.3. На докритичних швидкостях координати точок  $O_I$ ,  $O_{II}$  визначатимуть відхилення осі вала ротора від осі обертання у двох площинах корекції, а не положення головної центральної осі ротора.

Спосіб можна реалізувати і на критичних швидкостях. У цьому випадку повздожня вісь ротора буде здійснювати циліндричну чи конічну прецесію в залежності від критичної швидкості.

2. Дослідження якості виготовлення АБП, тарування дисбалансу, визначення резонансної частоти.

2.1. Дослідження якості виготовлення АБП. Для цього КГ встановлюються всередину АБП. Ротор розганяється до найбільшої швидкості і очікується настання балансування. Потім живлення двигуна відключається і на всьому діапазоні швидкостей обертання ротора, при якому зберігається балансування, спостерігаються положення точки від лазерного променя і положення КВ. При якісному виготовленні АБП його КГ найдовше займають нейтральне положення (положення, у якому вони не вносять дисбаланс у систему), а лазерний промінь вказує в одну точку. Точність виготовлення АБП впливає на похибку експерименту. Якщо лазерний промінь описує коло, то чим більший його діаметр, тим менша точність виготовлення АБП, а значить і точність експерименту.

Для фіксації якості виготовлення АБП треба обвести на горизонтальному екрані зовні найбільше коло, яке описує лазерний промінь за відсутністю дисбалансу. Це коло буде відповідати нульовому дисбалансу. Чутливість лазерного променя до дисбалансу можна буде визначати за цим колом. Так, найменший дисбаланс, при якому лазерний промінь виїде з цього кола, і буде визначати чутливість лазерного променя.

2.2. Тарування дисбалансу. Шляхом ділення балансувальної ємності АБП -  $S$  навпіл оцінюється чутливість лазерного променя до дисбалансу - не гірше за  $S/16$  і не краще за  $S/32$ . На рис. 4.4 показані кола, що описує лазерний промінь на горизонтальному екрані при різних дисбалансах.

Для проведення експериментів дисбаланс, що відповідає балансувальній ємності АБП, ділиться на 16 рівних частин. Відповідно до відхилень лазерного променя, на горизонтальному екрані проводяться кола відповідних діаметрів. Вони ділять екран на кільцеві області 0, 1, 2, ... (рис. 4.5). При попаданні лазерного променя в область номер  $i$  можна заключити, що дисбаланс ротора складає  $iS/16$ . Для дослідження залишкових дисбалансів від дисбалансів, що в  $1\div 2$  рази перевищують балансувальну ємність АБП, будуються аналогічні кола для дисбалансів, що в  $1\div 1,25$  рази перевищують балансувальну ємність АБП.

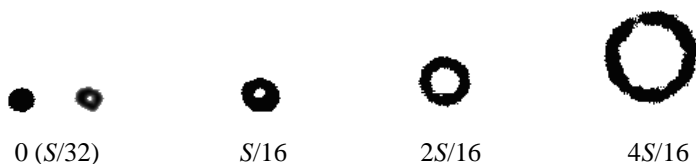


Рис. 4.4. Тарування дисбалансу

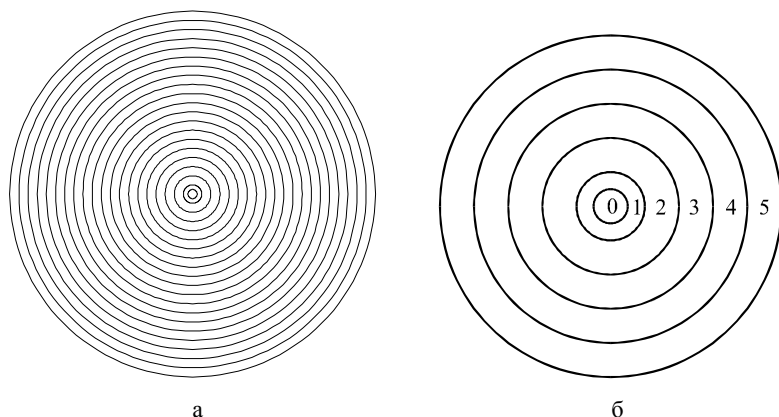


Рис. 4.5. Поділ горизонтального екрана на області дисбалансів від 0 до  $1,25 \cdot S$  з кроком  $S/16$  ( $S$  - балансувальна ємність АБП):  
а - області 0-20; б - області 0-5 - збільшені.

Діаметр точки лазерного променя регулювався шляхом встановлення перепони з отвором на шляху променя і переміщенням фокусуєчої лінзи. Цей діаметр повинен бути меншим за діаметр області 0.

2.3. Визначення частоти власних коливань. Вона визначається за допомогою лічильника імпульсів - секундоміра Elwgo FPM-09. Його фотоелемент розташовується на шляху лазерного променя при відсутності відхилення ротора (рис. 4.1, б). Потім ротор відхиляється, а

разом з цим відхиляється лазерний промінь. Лічильнику надається команда замірити тривалість одного повного коливання – він переходить у режим очікування. Потім ротор відпускається. Коли лазерний промінь перший раз проходить через фотоелемент, то лічильник починає рахувати час. Рахунок часу припиняється, коли лазерний промінь третій раз проходить через фотоелемент. Одиниця, поділена на отриманий проміжок часу і складає кількість власних коливань ротора за секунду. Вона вимірюється при різних початкових відхиленнях декілька разів.

### 4.3.3. Методика проведення експериментів

1. Обертання ротора із сталими кутовими швидкостями. Експерименти спрямовані на виділення різних режимів руху ротора і АБП, у тому числі усталених стаціонарних, квазіперіодичних і інших, якщо вони існують. Досліджуються параметри цих рухів і фактори, що на ці рухи впливають. Для основних рухів досліджується якість зрівноваження ротора і критичні швидкості (при переході через які основний рух із нестійкого стає стійким і навпаки). В ході цих досліджень перевіряються результати теоретичних досліджень. Задачі досліджень зібрані у табл. 4.2. При проведенні експериментів параметри змінюються незалежно і при будь-якій їх комбінації визначаються всі об'єкти спостереження.

Табл. 4.2.

Задачі досліджень при обертанні ротора із сталими кутовими швидкостями

№	Параметри, що змінюються	Об'єкти спостереження
1	Швидкість обертання ротора: - дорезонансна, менша $0,9\omega_0$ ; - наколорезонансна $(0,9 \div 1,1)\omega_0$ ; - зарезонансна, більша $1,1\omega_0$ .	Різні рухи системи ротор-АБП: - усталені, у яких КВ синхронно обертаються з ротором; - усталені квазіперіодичні; - інші.
2	Дисбаланс: - менший за ємність АБП; - більший за ємність АБП.	Якість зрівноваження ротора – залишковий дисбаланс.
3	Сили внутрішнього опору: - невеликі сили (рідке змащування); - великі сили (густе чи в'язке змащування).	Критичні швидкості для основних рухів.

2. Режими розгону і вибігу ротора

2.1. При розгоні ротора виявляються і досліджуються різні можливі режими. Об'єктами спостереження є коливання ротора під час розгону, різні режими руху КГ у перехідних процесах, час, за який КГ зрівноважать ротор. При цьому змінюються: початкові умови – початкові положення і швидкості КВ; швидкість розгону ротора; величина дисбалансу; величина сил внутрішнього опору і т.п. Задачі досліджень зібрані у табл. 4.3.

Табл. 4.3.

Задачі досліджень при розгоні ротора

№	Параметри, що змінюються	Об'єкти спостереження
1	Початкові положення КВ і їх швидкості (початкові умови)	Різні режими руху ротора і КВ.  Швидкість зрівноваження ротора.
2	Швидкість розгону ротора	
3	Дисбаланс: - менший за ємність АБП; - більший за ємність АБП.	
4	Сили внутрішнього опору: - невеликі сили (рідке змащування); - великі сили (густе чи в'язке змащування).	

2.2. При вибігу ротора спостерігаються і досліджуються різні режими руху ротора і КВ, досліджуються критичні швидкості різних усталених рухів. При цьому змінюються: швидкість вибігу; величина дисбалансу; сили внутрішнього опору. Задачі досліджень зібрані у табл. 4.4.

Табл. 4.4.

Задачі досліджень при вибігу ротора

№	Параметри, що змінюються	Об'єкти спостереження
1	Швидкість вибігу	Різні режими руху ротора і КВ.  Критичні швидкості для різних усталених рухів.
2	Дисбаланс: - менший за ємність АБП; - більший за ємність АБП.	
3	Сили внутрішнього опору: - невеликі сили (рідке змащування); - великі сили (густе чи в'язке змащування).	

3. Реакція на збурення різного походження.

3.1. Чутливість АБП до зміни дисбалансу полягає у вивченні реакції системи на дискретну і неперервну зміну дисбалансу. При цьому змінюються: дисбаланс; сили внутрішнього опору; швидкість обертання

ротора. Об'єктом спостереження є тривалість перехідних процесів; найменша величина дисбалансу, на появу якої реагує АБП. Задачі досліджень зібрані у табл. 4.5.

Табл. 4.5.

Задачі досліджень при зміні дисбалансу

№	Параметри, що змінюються	Об'єкти спостереження
1	Дисбаланс 1. Дискретно: - менший за ємність АБП; - більший за ємність АБП. 2. Неперервно	Тривалість перехідних процесів.
2	Швидкість обертання ротора	Найменша величина дисбалансу, на появу якої реагує АБП.
3	Сили внутрішнього опору: - невеликі сили (рідке змащування); - великі сили (густе чи в'язке змащування).	

3.2. Реакція на бічний чи торцевий тиск потрібна для вивчення поведінки АБП при шліфуванні чи фрезеруванні, а також у випадку порушення ізотропності опор. Задачі досліджень зібрані у табл. 4.6.

Табл. 4.6.

Задачі досліджень при торцевому чи бічному тиску на ротор

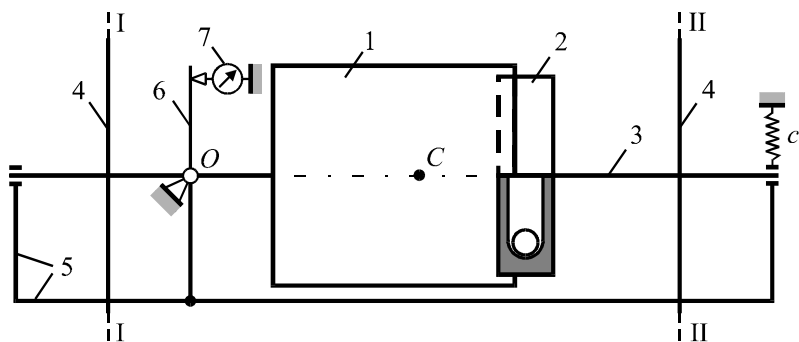
№	Параметри, що змінюються	Об'єкти спостереження
1	Дисбаланс - менший за ємність АБП; - більший за ємність АБП.	Режими руху ротора і АБП
2	Швидкість обертання ротора	Критичні швидкості
3	- Бічний чи торцевий тиск на ротор	

#### 4.4. Стенд ротора з нерухою точкою і валом, який утримується циліндричним шарніром

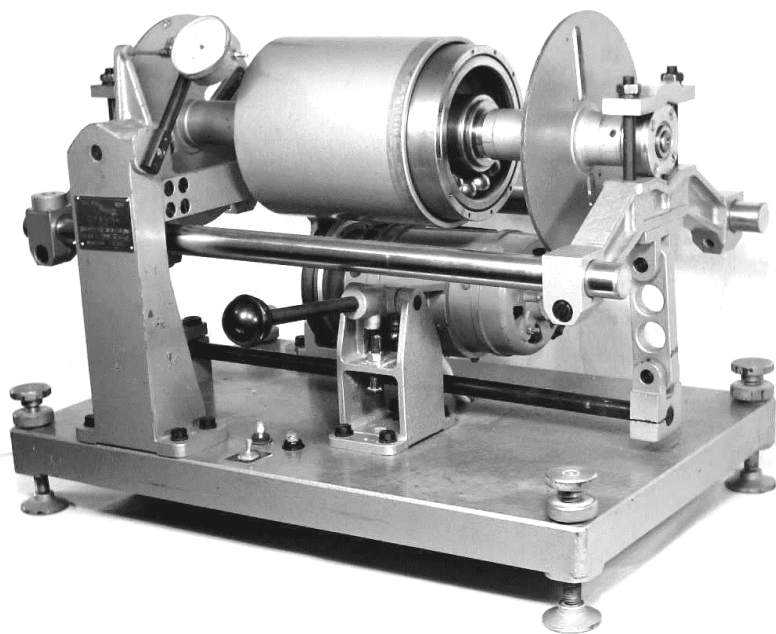
В роботах, присвячених експериментальному дослідженню процесу різання [103,104,180,181], не створювався спеціальний стенд для дослідження процесу автобалансування у випадку, коли крім власного обертання ротор має один ступінь вільності. Дослідження були проведені для ручних шліфувальних машин. Вони носять спеціальний

характер, бо були спрямовані на дослідження коливань ручки машини, а рух КВ відносно ротора, критичні швидкості і інше - не досліджувалося.

На рис. 4.6 наведені схема і фотографія стенда, створеного для дослідження динаміки кульового АБП при зрівноваженні ротора з одним ступенем вільності.



а



б

Рис. 4.6. Стенд ротора з нерухою точкою і валом, який утримується циліндричним шарніром: а - схема, б - фотографія

Стенд створений на базі верстату для динамічного балансування ТММ ІК. У ньому ротор 1 і кульовий АБП 2 насаджені на вал 3. На вал також насаджені диски 4, призначені для створення дисбалансів у двох площинах I-I і II-II, і лімби, призначені для відрахування кутів поворотів дисків. На диски встановлюються зосереджені вантажі. Вал 3 тримає рама 5, яка пружно встановлена на опори з можливістю повороту навколо точки *O*. Вертикальні коливання рами вимірюються за допомогою важеля 6, прикріпленого до рами і багатообертового індикатора вимірювання переміщень стрілочного типу 7. Обертання ротору надається колекторним електродвигуном, який починає працювати після натискання важеля двигуна (рис. 4.6, б). Для спостереження за рухом куль відносно ротора використовується автомобільний стробоскоп. Для спостереження за рухом ротора, також використовується лазерний ліхтарик, корпус якого вкручується у отвір на правому торці вала.

Швидкість обертання ротора вимірюється цифровим тахометром ЦАТ-3М, частота власних коливань системи і проміжки часу - за допомогою лічильника імпульсів - секундоміра Elwro FPM-09.

Кулі встановлюються на бігову доріжку через кільцеву щілину, ширина якої більша за діаметр куль. При дослідженні динаміки АБП при малих силах в'язкого опору, діючих на кулі, доріжка змащується мастилом різної в'язкості. Випадінню куль перешкоджає шайба з оргекла, яка притискається до АБП гайкою, що нагвинчується на вал. Для зміни кількості куль гайка відгвинчується, чим збільшується щілина, через яку кулі і встановлюються усередину АБП. При дослідженні динаміки АБП при великих силах в'язкого опору, діючих на кулі, корпус АБП заповнюється мастилом, після чого закривається органічним склом, яке щільно притискається до АБП як згаданою гайкою, так і металевим кільцем, що пригвинчується до АБП. Зміна кількості куль у цьому випадку потребує розбору правої частини ротора.

Основні характеристики стенда наступні:

- маса складеного ротора (всіх обертових частин - ротора, вала, корпусу АБП, дисків, лімбів) -  $10300 \pm 50$  *гр*;
- маса куль - 10, 20, 45 *гр*;
- частота власних коливань рами -  $3,275 \pm 0,010$  *Гц*;
- ціна поділки кутової шкали дисків - 2 *град.*;
- ціна поділки радіальної шкали дисків - 1 *мм*;
- ціна поділки багатообертового індикатора переміщень стрілочного типу - 0,01 *мм*;
- діапазон частот обертання ротора -  $0 \div 1800$  *об/хв*;
- час вибігу ротора без КВ з початковою швидкістю 1800 *об/хв* складає -  $175 \pm 3$  *с*.

Зауважимо, що складений ротор без КВ був зрівноважений на верстаті після збору. При цьому розмах коливань стрілки індикатора при переході через резонанс не перевищує 0,02 мм. За допомогою магнітної стійки для бігової доріжки були виміряні радіальне биття - 0,09 мм, і торцеве биття - 0,02 мм. Ці величини свідчать про якісні зборку і попереднє балансування ротора.

Для проведення експерименту ротору надається максимальна початкова кутова швидкість обертання. Далі рух ротора і АБП вивчається на вибігу ротора. Об'єктом спостереження є критичні швидкості, при переході через які настає чи порушується автобалансування. У процесі експериментів змінюються дисбаланс, кількість куль, сили в'язкого опору, що перешкоджають коченню куль (в'язкість мастила, яким змащується доріжка). Задачі досліджень зведені у табл. 4.7.

Табл. 4.7.

Задачі досліджень

№	Параметри, що змінюються	Об'єкти спостереження
1	Дисбаланс	Критичні швидкості, при переході через які настає чи порушується автобалансування;
2	Кількість куль у АБП (відношення маси КВ до маси системи)	
3	Сили в'язкого опору, що перешкоджають коченню куль	Зменшення відхилення осі вала від осі обертання

## Висновки розділу 4

1. Експериментальні дослідження динаміки системи ротор-АБП можна поділити на дві групи, які мають різну мету. Перша група спрямована на дослідження зрівноваження певним типом АБП певного узагальненого типу ротора - що здійснює плоский рух, що рухається навколо нерухомої точки, що здійснює просторовий рух, тощо. Це загальнонаукові, фундаментальні дослідження, бо мають на меті встановити найбільш загальні закономірності, що відбуваються при зрівноваженні узагальнених роторних систем. Друга група спрямована на дослідження динаміки зрівноваження пасивними АБП роторів відцентрових машин певного призначення - шпинделів верстатів, ручних шліфувальних машин, CD / DVD дисків, барабанів пральних машин, тощо. Це прикладні дослідження.

2. При проведенні загальнонаукових експериментальних досліджень вивчався процес зрівноважування ротора так званими класичними АБП – кільцевими, маятниковими і кульовими. Основна увага в цих дослідженнях приділялася часу зрівноважування ротора, величині



залишкового дисбалансу, числу і величині критичних швидкостей. Недослідженими залишилися: перехідні процеси, що стосуються розгону КГ до швидкості обертання ротора; усталені рухи КВ, у яких вони рухаються відносно ротора; стійкість цих рухів на всьому інтервалі зміни кутової швидкості обертання ротора в залежності від параметрів системи; реакція системи ротор-АБП на збурення різного походження. Не досліджена і динаміка некласичних АБП.

3. Задачі експериментальних досліджень можна поділити на декілька груп, відповідно до того, на дослідження чого вони спрямовані. Перша група спрямована на перевірку результатів теоретичних досліджень: стійкості різних стаціонарних усталених рухів на сталих швидкостях обертання ротора; квазіперіодичних рухів; швидкості зрівноваження ротора; якості зрівноваження ротора. Друга група досліджень спрямована на дослідження режимів розгону і вибігу ротора. Третя група спрямована на дослідження реакцій ротора і АБП на збурення різного походження: зміну швидкості обертання ротора; удари по корпусу машини; зміну орієнтації ротора; бічний чи торцевий тиск на ротор і т.п. Зауважимо, що друга і третя групи досліджень спрямована на вивчення тих явищ, які теоретично важко дослідити.

4. Для експериментального дослідження динаміки системи ротор-АБП ефективним є метод, який ґрунтується на використанні стробоскопічного освітлення для спостереження за рухом КВ відносно ротора, і (лазерного) променя, спрямованого по повздовжній осі ротора – для попереднього балансування ротора, спостереження за рухом ротора, оцінки швидкості і якості зрівноваження ротора, визначення власних частот коливань ротора, його осьових моментів інерції, тощо. За допомогою цього методу можна експериментально дослідити майже усі явища, якими супроводжується процес зрівноваження і віброзахисту ротора пасивними АБП будь-якого типу, зокрема з твердими КВ, чи рідинних.

## РОЗДІЛ 5. ДИНАМІКА БАГАТОКУЛЬОВОГО (БАГАТОМАЯТНИКОВОГО) АБП

### 5.1. Фізична модель і диференціальні рівняння руху системи

**1. Опис моделі ротора й АБП.** Для дослідження динаміки системи прийнята плоска модель ротора і АБП. У рамках цієї моделі ротор - симетричний плоский диск маси  $M$ , насаджений з ексцентриситетом  $e$  на абсолютно жорсткий вал, перпендикулярний його площині (рис. 5.1). Ротор розташований вертикально і рухається плоскопаралельно у горизонтальній площині. У випадку маятникового АБП (рис. 5.1, а) на вал ротора насаджено  $n$  маятників, масою  $m_j$ , фізичної довжини  $l_j$  з осьовим моментом інерції  $J_j$  відносно осі, на яку насаджено,  $/j = \overline{1, n}/$ . У випадку кульового АБП (рис. 5.1, б)  $n$  куль, масою  $m_j$  рухаються по кільцевим доріжкам радіуса  $l_j$ ,  $/j = \overline{1, n}/$ , причому кулі приймаються за матеріальні точки, або  $l_j$  - відстані від осі вала до центра мас  $j$ -ої кулі, і осьовим моментом інерції кулі відносно її центральної осі нехтуємо. Рух системи визначається відносно правої системи нерухомих прямокутних осей  $X, Y, Z$ . Вісь  $Z$  спрямована по осі обертання убік вектора кутової швидкості. Кут повороту ротора  $\varphi$  відраховується від додатного напрямку осі  $X$ . Положення маятників (куль) визначаються аналогічно кутами  $\varphi_j$ . При повороті  $j$ -го маятника навколо вала на нього діє момент сил в'язкого опору  $H_j l_j (\varphi' - \varphi'_j)$ , де  $H_j$  - коефіцієнт сил в'язкого опору,  $(\varphi' - \varphi'_j)$  - швидкість обертання маятника навколо вала відносно ротора, і штрих над величинами означає похідну за часом. При русі  $j$ -ої кулі по доріжці на неї діє сила в'язкого опору  $H_j l_j (\varphi' - \varphi'_j)$ , де  $H_j$  - коефіцієнт в'язкого опору, і  $l_j (\varphi' - \varphi'_j)$  - швидкість руху кулі по доріжці відносно ротора.

При нерухомому роторі вал суміщений з віссю обертання. У процесі руху вал - точка  $K$ , відхиляється від осі обертання, точки  $O$ , і на нього починають діяти оновлююча сила, і сила в'язкого опору середовища

$$\vec{F}_c = -(x c_x, y c_y, 0)^T, \quad \vec{F}_H = -(x' H_x, y' H_y, 0)^T, \quad (5.1)$$

де:  $x, y$  - координати, що визначають положення вала щодо осей  $X, Y$ ;  $c_x, c_y, H_x, H_y$  - коефіцієнти жорсткості і демпфірування в опорах вала в напрямках осей  $X$  і  $Y$ .

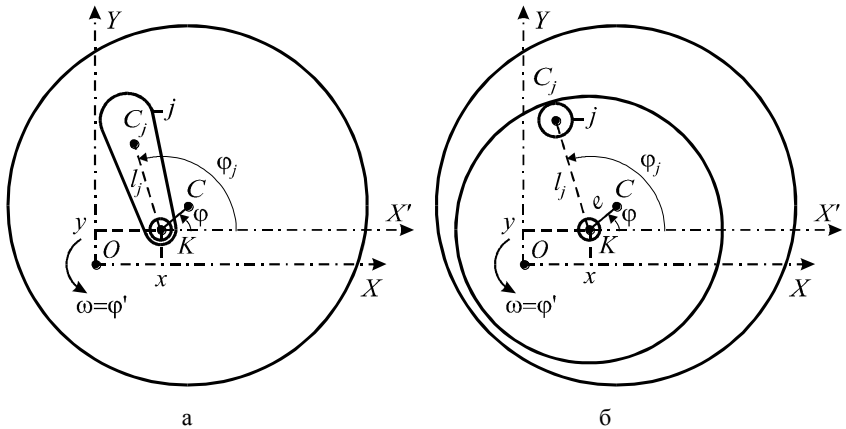


Рис. 5.1. Плоска модель ротора і: а – маятникового, б – кульового АБП

У подальшому, для більшої стислості, при виводі диференціальних рівнянь руху системи посилаємося тільки на маятниковий АБП.

**2. Вивід диференціальних рівнянь руху ротора й АБП.** Маятники насаджені на рухомий вал. Тому для виведення їхніх рівнянь динаміки можна використовувати теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної системи у вигляді (3.1):

$$\frac{dL_{wj}}{dt} + \vec{k} \cdot (\vec{r}_{Kj} \times m\vec{r}_K'') = M_{wj}^{(e)}, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (5.2)$$

де  $L_{wj}$  - кінетичний момент  $j$ -го маятника щодо рухомої осі  $W$ , спрямованої по осі вала ротора;  $\vec{k}$  - одиничний вектор, спрямований по осі  $W$ ;  $\vec{r}_{Kj}$  - радіус-вектор  $j$ -го маятника, що виходить із точки  $K$  і закінчується в центрі мас маятника;  $\vec{r}_K''$  - прискорення точки  $K$ ;  $M_{wj}^{(e)}$  - головний момент зовнішніх сил, що діють на маятник щодо осі  $W$ .

У проекціях на координатні осі  $X, Y, Z$ :

$$\vec{\omega} = (0, 0, \varphi')^T, \quad \vec{r}_K = (x, y, 0)^T, \quad \vec{r}_K' = (x', y', 0)^T, \quad \vec{r}_K'' = (x'', y'', 0)^T, \quad \vec{k} = (0, 0, 1)^T, \\ L_{wj} = J_j \varphi_j', \quad M_{wj}^{(e)} = -H_j(\varphi_j' - \varphi'), \quad \vec{r}_{Kj} = (l_j \cos \varphi_j, l_j \sin \varphi_j, 0)^T, \quad (5.3)$$

де  $J_j$  – момент інерції  $j$ -го маятника відносно осі  $W$ .

Підстановка (5.3) у (5.2) дає наступні рівняння динаміки маятників

$$J_j \varphi_j'' + H_j(\varphi_j' - \varphi') - m_j l_j (x'' \sin \varphi_j - y'' \cos \varphi_j) = 0, \quad / j = \overline{1, n} / . \quad (5.4)$$

Другу групу диференціальних рівнянь руху системи дає теорема про рух центра мас системи, що має вигляд (3.5)

$$M_{\Sigma} \vec{r}_C'' = \vec{F}_c + \vec{F}_H, \quad (5.5)$$

де  $M_{\Sigma} = M + \sum_{j=1}^n m_j$  – маса всієї системи;  $\vec{r}_C''$  – прискорення центра мас.

У проекціях на осі  $X, Y, Z$ :

$$M_{\Sigma} \vec{r}_C = \begin{pmatrix} M(x + e \cos \varphi) + \sum_{j=1}^n m_j (x + l_j \cos \varphi_j) \\ M(y + e \sin \varphi) + \sum_{j=1}^n m_j (x + l_j \sin \varphi_j) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{\Sigma} \vec{v}_C = \begin{pmatrix} M(x' - e\varphi' \sin \varphi) + \sum_{j=1}^n m_j (x' - l_j \varphi_j' \sin \varphi_j) \\ M(y' + e\varphi' \cos \varphi) + \sum_{j=1}^n m_j (x' + l_j \varphi_j' \cos \varphi_j) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{\Sigma} \vec{a}_C = \begin{pmatrix} M[x'' - e(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi)] + \sum_{j=1}^n m_j [x'' - l_j (\varphi_j'' \sin \varphi_j + \varphi_j'^2 \cos \varphi_j)] \\ M[y'' + e(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi)] + \sum_{j=1}^n m_j [y'' + l_j (\varphi_j'' \cos \varphi_j - \varphi_j'^2 \sin \varphi_j)] \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Підставляючи (5.1) і (5.6) у рівняння (5.5), і проектуючи на осі  $x, y$ , одержимо:

$$M_{\Sigma} x'' + H_x x' + c_x x - \sum_{j=1}^n m_j l_j (\varphi_j'' \sin \varphi_j + \varphi_j'^2 \cos \varphi_j) - Me(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) = 0,$$

$$M_{\Sigma} y'' + H_y y' + c_y y + \sum_{j=1}^n m_j l_j (\varphi_j'' \cos \varphi_j - \varphi_j'^2 \sin \varphi_j) - Me(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi) = 0. \quad (5.7)$$

Для складання рівняння обертального руху ротора використовуємо для нього теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної системи щодо рухомої осі  $W$  у вигляді (3.7):

$$\frac{dL_{w0}}{dt} + (M\vec{r}_{K0} \times \vec{r}_K'') \cdot \vec{k} = M_{w0}^{(e)}, \quad (5.8)$$

де  $L_{w0}$  - кінетичний момент ротора відносно осі  $W$ ;  $M_{w0}^{(e)}$  - головний момент зовнішніх сил, діючих на ротор, щодо осі  $W$ .

У проєкціях на координатні осі  $X, Y, Z$ :

$$L_{w0} = J_0\varphi', \quad J_0 = J_C + Me^2, \quad \vec{r}_{K0} = (Me \cos \varphi, Me \sin \varphi, 0)^T,$$

$$M_{w0}^{(e)} = \sum_{j=1}^n H_j l_j (\varphi'_j - \varphi') - H_0 \varphi' + M_{rot}, \quad (5.9)$$

де  $J_0, J_C$  - осьові моменти інерції ротора відносно осі  $W$  і центральної осі, паралельної  $W$ ;  $M_{rot}$  - рушійний момент, що розвивається приводом;  $-H_0\varphi'$  - момент зовнішніх сил в'язкого опору, що діють на вал ротора.

Підстановка (5.3) і (5.9) у (5.8), після перетворення, дає наступне рівняння обертального руху ротора

$$J_0\varphi'' + H_0\varphi' + \sum_{j=1}^n H_j l_j (\varphi' - \varphi'_j) - Me(x'' \sin \varphi - y'' \cos \varphi) = M_{rot}. \quad (5.10)$$

З (5.4), (5.7), (5.10) видно, що динаміку системи характеризують  $(4n+8)$  параметрів (при цьому враховано, що  $M_\Sigma, J_0$  виражаються через ці параметри) і рушійний момент  $M_{rot}$ :

$$m_i, l_i, J_i, H_i, /i = \overline{1, n}/; \quad M, e, J_C, c_x, c_y, H_x, H_y, H_0; \quad M_{rot}. \quad (5.11)$$

Для різних моделей привода, рушійний момент можна подавати у вигляді:

- 1)  $M_{rot} = \text{const}$  - сталий момент;
- 2)  $M_{rot} = c_1(\omega - \varphi')$ ,  $\omega = \text{const}$  - що лінійно залежить від відхилення поточної кутової швидкості  $\varphi'$  від потрібної  $\omega$ ;
- 3)  $M_{rot} = c_1(\omega - \varphi') + c_2(\omega t - \varphi)$ ,  $\omega = \text{const}$  - що лінійно залежить від відхилень поточної кутової швидкості  $\varphi'$  від потрібної  $\omega$  і поточного кута повороту  $\varphi$  від потрібного  $\omega t$ ;
- 4)  $M_{rot}$  такий, що  $\varphi' = \omega = \text{const}$ , тобто ротор обертається із сталою кутовою швидкістю.

Для виділення істотно відмінних (незалежних) параметрів, що характеризують динаміку системи, приведемо отримані рівняння до безрозмірного вигляду. Визначимо першу резонансну частоту обертання ротора рівністю:

$$\omega_1 = \sqrt{c_x / M_\Sigma}. \quad (5.12)$$

Це частота власних коливань ротора при нерухомих маятниках і відсутності обертання ротора. Уведемо допоміжні параметри:

$$l^* = \sum_{j=1}^n m_j l_j / \sum_{j=1}^n m_j, \quad r^* = \sum_{j=1}^n m_j l_j / M_\Sigma. \quad (5.13)$$

Параметр  $l^*$  є усередненою за масою довжиною маятників, чи усереднений радіус бігової доріжки, а параметр  $r^*$  - найбільший ексцентриситет, з яким ротор може бути насаджений на вал, щоб його могли зрівноважити КВ.

Уведемо безрозмірні параметри

$$\begin{aligned} R_m &= \sum_{i=1}^n m_i / M_\Sigma, \quad j_0 = \frac{Mel^*}{J_0}, \quad h_x = \frac{H_x}{\omega_1 M_\Sigma}, \quad h_y = \frac{H_y}{\omega_1 M_\Sigma}, \\ h_0 &= \frac{H_0}{J_0 \omega_1}, \quad e_0 = Me / \sum_{i=1}^n m_i l_i, \quad R_{\omega 2} = \sqrt{\frac{c_y}{M_\Sigma \omega_1^2}}, \\ e_j &= m_j l_j / \sum_{j=1}^n m_j l_j, \quad j_j = \frac{m_j l_j l^*}{J_j}, \quad h_j = \frac{H_j}{\omega_1 J_j}, \quad / j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Уведемо безрозмірні змінні і час

$$\xi = \frac{x}{r^*}, \quad \eta = \frac{y}{r^*}, \quad p = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \tau = \omega_1 t \left( \frac{d}{dt} = \omega_1 \frac{d}{d\tau} \right). \quad (5.15)$$

Поділимо  $j$ -е рівняння в (5.4) на  $J_j \omega_1^2$ , два рівняння в (5.7) на  $M_\Sigma r^* \omega_1^2$ , рівняння (5.10) на  $J_0 \omega_1^2$ . З огляду на (5.12-5.15), одержимо рівняння динаміки в безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_j + h_j(\dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}) - R_m j_j (\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \ddot{\eta} \cos \varphi_j) &= 0, \quad / j = \overline{1, n}, \\ \ddot{\xi} + h_x \dot{\xi} + \xi - \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j) &= e_0 (\dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi), \\ \ddot{\eta} + h_y \dot{\eta} + R_{\omega 2}^2 \eta + \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\varphi}_j \cos \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \sin \varphi_j) &= -e_0 (\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi), \\ \ddot{\varphi} + h_0 \dot{\varphi} - R_m j_0 (\ddot{\xi} \sin \varphi - \ddot{\eta} \cos \varphi) + \sum_{i=1}^n \frac{j_0 e_0}{j_i e_i} h_i (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_i) &= m_{rot}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

де точка над змінною означає похідну за  $\tau$  і

$$m_{rot} = M_{rot} / J_0 \omega_1^2 \quad (5.17)$$

- безрозмірний рушійний момент.

З (5.16), видно, що в загальному випадку динаміку маятникового (кульового) АБП характеризують  $(3n+7-1)$  істотно відмінних безрозмірних параметрів:

$$h_i \geq 0, j_i, e_i > 0, / i = \overline{1, n} / \left( \sum_{i=1}^n e_i = 1 \right);$$

$$R_{\omega 2} \geq 1, h_x, h_y, h_0 \geq 0, e_0 \geq 0, j_0, R_m > 0 \quad (R_m \ll 1), \quad (5.18)$$

і безрозмірний рушійний момент  $m_{rot}$ .

У випадку однакових КВ

$$l_j = l^* = l, m_j = m, J_j = J, e_j = 1/n, h_j = h, j_j = j, / j = \overline{1, n} / ,$$

$$R_m = \frac{nm}{M + nm}, 0 < j \leq 1, 0 < R_m < 1. \quad (5.19)$$

Введемо нові параметри

$$\tilde{R}_m = jR_m / 2, \quad \tilde{j} = j_0 / j, \quad 0 < \tilde{R}_m < 0,5. \quad (5.20)$$

Тоді рівняння динаміки (5.16) приймуть вигляд

$$\ddot{\varphi}_j + h(\dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}) - 2\tilde{R}_m(\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \ddot{\eta} \cos \varphi_j) = 0, \quad / j = \overline{1, n} / ,$$

$$\ddot{\xi} + h_x \dot{\xi} + \xi - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 (\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

$$\ddot{\eta} + h_y \dot{\eta} + R_{\omega 2}^2 \eta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\varphi}_j \cos \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \sin \varphi_j) = -e_0 (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),$$

$$\ddot{\varphi} + h_0 \dot{\varphi} - 2\tilde{R}_m \tilde{j} (\ddot{\xi} \sin \varphi - \ddot{\eta} \cos \varphi) + \tilde{j} n e_0 h \sum_{i=1}^n (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_i) = m_{rot}. \quad (5.21)$$

В цьому випадку динаміку системи характеризують 9 незалежних параметрів

$$h, h_0, h_x, h_y, \tilde{R}_m, R_{\omega 2}, \tilde{j}, e_0, n, \quad (5.22)$$

і рушійний момент  $m_{rot}$ .

Якщо ротор утримують ізотропні опори, то

$$c_x = c_y = c, h_x = h_y = H, R_{\omega 2} = 1, \quad (5.23)$$

і система (5.16) приймає вигляд

$$\ddot{\varphi}_j + h_j(\dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}) - R_m j_j (\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \ddot{\eta} \cos \varphi_j) = 0, \quad / j = \overline{1, n} / ,$$

$$\ddot{\xi} + H \dot{\xi} + \xi - \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 (\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

$$\ddot{\eta} + H\dot{\eta} + \eta + \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \cos \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \varphi_j) = -e_0 (\ddot{\phi} \cos \varphi - \dot{\phi}^2 \sin \varphi),$$

$$\ddot{\phi} + h_0 \dot{\phi} - R_m j_0 (\ddot{\xi} \sin \varphi - \dot{\eta} \cos \varphi) + \sum_{i=1}^n \frac{j_0 e_0}{j_i e_i} h_i (\dot{\phi} - \dot{\phi}_i) = m_{rot}. \quad (5.24)$$

З (5.24), видно, що в цьому випадку динаміку маятникового (кульового) АБП характеризують  $(3n+5-1)$  істотно відмінних безрозмірних параметрів і безрозмірний рушійний момент  $m_{rot}$ :

$$h_i \geq 0, \quad j_i, e_i > 0, \quad / i = \overline{1, n} / \left( \sum_{i=1}^n e_i = 1 \right);$$

$$H, h_0 \geq 0, \quad e_0 \geq 0, \quad j_0, R_m > 0 \quad (R_m \ll 1). \quad (5.25)$$

У випадку ізотропних опор і однакових КВ система (5.21) прийме вигляд

$$\ddot{\phi}_j + h(\dot{\phi}_j - \dot{\phi}) - 2\tilde{R}_m (\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \dot{\eta} \cos \varphi_j) = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$\ddot{\xi} + H\dot{\xi} + \xi - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\phi}_j \sin \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 (\ddot{\phi} \sin \varphi - \dot{\phi}^2 \cos \varphi),$$

$$\ddot{\eta} + H\dot{\eta} + \eta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\phi}_j \cos \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \varphi_j) = -e_0 (\ddot{\phi} \cos \varphi - \dot{\phi}^2 \sin \varphi),$$

$$\ddot{\phi} + h_0 \dot{\phi} - 2\tilde{R}_m \tilde{j} (\ddot{\xi} \sin \varphi - \dot{\eta} \cos \varphi) + \tilde{j} n e_0 h \sum_{i=1}^n (\dot{\phi} - \dot{\phi}_i) = m_{rot}. \quad (5.26)$$

Динаміку системи характеризують 7 незалежних параметрів

$$h, h_0, H, \tilde{R}_m, \tilde{j}, e_0, n, \quad (5.27)$$

і рушійний момент  $m_{rot}$ .

Нехай рушійний момент такий, що ротор обертається із сталою кутвою швидкістю  $\omega$ . Введемо замість змінної  $p$  безрозмірний параметр  $R_\omega$

$$R_\omega = \omega / \omega_1, \quad R_\omega = \text{const}. \quad (5.28)$$

Тоді рівняння динаміки системи (5.16) приймуть вигляд

$$\ddot{\phi}_j + h_j (\dot{\phi}_j - R_\omega) - R_m j_j (\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \dot{\eta} \cos \varphi_j) = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$\ddot{\xi} + h_x \dot{\xi} + \xi - \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \sin \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 R_\omega^2 \cos R_\omega \tau,$$

$$\ddot{\eta} + h_y \dot{\eta} + R_\omega^2 \eta + \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \cos \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \varphi_j) = e_0 R_\omega^2 \sin R_\omega \tau. \quad (5.29)$$



Видно, що при обертанні ротора із сталою кутовою швидкістю динаміку маятничкового (кульового) АБП характеризують  $(3n+6-2)$  істотно відмінних безрозмірних параметрів:

$$h_i \geq 0, \quad j_i, e_i > 0, \quad / i = \overline{1, n} / \left( \sum_{i=1}^n e_i = 1 \right);$$

$$R_{\omega 2} \geq 1, \quad h_x, h_y, e_0 \geq 0, \quad R_{\omega}, R_m > 0 \quad (R_m \ll 1). \quad (5.30)$$

Якщо КВ однакові, то система (5.29) приймає вигляд

$$\ddot{\varphi}_j + h(\dot{\varphi}_j - R_{\omega}) - 2\tilde{R}_m(\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \ddot{\eta} \cos \varphi_j) = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$\ddot{\xi} + h_x \dot{\xi} + \xi - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 R_{\omega}^2 \cos R_{\omega} \tau,$$

$$\ddot{\eta} + h_y \dot{\eta} + R_{\omega 2}^2 \eta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\varphi}_j \cos \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \sin \varphi_j) = e_0 R_{\omega}^2 \sin R_{\omega} \tau. \quad (5.31)$$

В цьому випадку динаміку системи визначають 8 незалежних параметрів

$$R_{\omega 2} \geq 1, \quad h, h_x, h_y, e_0 \geq 0, \quad n, \quad R_{\omega}, \tilde{R}_m > 0 \quad (\tilde{R}_m \ll 1). \quad (5.32)$$

Нехай ротор обертається із сталою кутовою швидкістю і його утримують ізотропні опори. Тоді

$$R_{\omega 2} = 1, \quad h_x = h_y = H, \quad R_{\omega} = \omega / \omega_1 = \text{const}, \quad (5.33)$$

і рівняння динаміки системи (5.29) приймуть вигляд

$$L_j = \ddot{\varphi}_j + h_j(\dot{\varphi}_j - R_{\omega}) - R_m j_j(\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \ddot{\eta} \cos \varphi_j) = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$L_{n+1} = \ddot{\xi} + H \dot{\xi} + \xi - \sum_{j=1}^n e_j(\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 R_{\omega}^2 \cos R_{\omega} \tau,$$

$$L_{n+2} = \ddot{\eta} + H \dot{\eta} + \eta + \sum_{j=1}^n e_j(\ddot{\varphi}_j \cos \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \sin \varphi_j) = e_0 R_{\omega}^2 \sin R_{\omega} \tau. \quad (5.34)$$

Видно, що у випадку ротора на ізотропних опорах, який обертається із сталою кутовою швидкістю, динаміку маятничкового (кульового) АБП характеризують  $(3n+4-2)$  істотно відмінних безрозмірних параметрів:

$$h_i \geq 0, \quad j_i, e_i > 0, \quad / i = \overline{1, n} / \left( \sum_{i=1}^n e_i = 1 \right); \quad H, e_0 \geq 0, \quad R_{\omega}, R_m > 0 \quad (R_m \ll 1). \quad (5.35)$$

Якщо КВ однакові, то система (5.34) приймає вигляд

$$\ddot{\varphi}_j + h(\dot{\varphi}_j - R_{\omega}) - 2\tilde{R}_m(\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \ddot{\eta} \cos \varphi_j) = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$\ddot{\xi} + H \dot{\xi} + \xi - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 R_{\omega}^2 \cos R_{\omega} \tau,$$

$$\ddot{\eta} + H\dot{\eta} + \eta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\phi}_j \cos \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \varphi_j) = e_0 R_\omega^2 \sin R_\omega \tau. \quad (5.36)$$

В цьому випадку динаміку системи визначають 6 незалежних параметрів

$$h, H, e_0 \geq 0, n, R_\omega, \tilde{R}_m > 0 \quad (\tilde{R}_m \ll 1). \quad (5.37)$$

Перетворимо систему рівнянь (5.34) до комплексного вигляду. Введемо комплексну змінну

$$z = \xi + i\eta. \quad (5.38)$$

Враховуючи, що

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}, \quad \ddot{\xi} \sin \alpha - \ddot{\eta} \cos \alpha = \frac{i}{2} (\ddot{z} e^{-i\alpha} + \ddot{\bar{z}} e^{i\alpha}),$$

перетворюємо систему (5.34) за алгоритмом:

$$M_j = L_j, \quad / j = \overline{1, n/}, \quad M_{n+1} = L_{n+1} + iL_{n+2}, \quad M_{n+2} = L_{n+1} - iL_{n+2}$$

Одержуємо

$$\begin{aligned} M_j &= \ddot{\phi}_j + h_j(\dot{\phi}_j - R_\omega) - \frac{iR_m j}{2} (\ddot{z} e^{-i\varphi_j} - \ddot{\bar{z}} e^{i\varphi_j}) = 0, \quad / j = \overline{1, n/}, \\ M_{n+1} &= \ddot{z} + H\dot{z} + z - \sum_{j=1}^n e_j (\dot{\phi}_j^2 - i\ddot{\phi}_j) e^{i\varphi_j} = e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega \tau}, \\ M_{n+2} &= \ddot{\bar{z}} + H\dot{\bar{z}} + \bar{z} - \sum_{j=1}^n e_j (\dot{\phi}_j^2 + i\ddot{\phi}_j) e^{-i\varphi_j} = e_0 R_\omega^2 e^{-iR_\omega \tau}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Якщо КВ однакові, то система (5.39) приймає вигляд

$$\begin{aligned} M_j &= \ddot{\phi}_j + h(\dot{\phi}_j - R_\omega) - i\tilde{R}_m (\ddot{z} e^{-i\varphi_j} - \ddot{\bar{z}} e^{i\varphi_j}) = 0, \quad / j = \overline{1, n/}, \\ M_{n+1} &= \ddot{z} + H\dot{z} + z - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\dot{\phi}_j^2 - i\ddot{\phi}_j) e^{i\varphi_j} = e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega \tau}, \\ M_{n+2} &= \ddot{\bar{z}} + H\dot{\bar{z}} + \bar{z} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\dot{\phi}_j^2 + i\ddot{\phi}_j) e^{-i\varphi_j} = e_0 R_\omega^2 e^{-iR_\omega \tau}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Переходимо до системи координат, яка обертається із сталою кутовою швидкістю  $\Omega$ :

$$\varphi_j = \Omega\tau + \alpha_j; / j = \overline{1, n/}; \quad z = s e^{i\Omega\tau}. \quad (5.41)$$

Тоді

$$\dot{\phi}_j = \Omega + \dot{\alpha}_j, \quad \ddot{\phi}_j = \ddot{\alpha}_j, \quad / j = \overline{1, n/}; \quad \dot{z} = (\dot{s} + i\Omega s) e^{i\Omega\tau}, \quad \ddot{z} = (\ddot{s} + 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 s) e^{i\Omega\tau}.$$

Перетворюємо систему (5.39) за алгоритмом

$$R_j = M_j; \quad / j = \overline{1, n/}; \quad R_{n+1} = M_{n+1} e^{-i\Omega\tau}, \quad R_{n+2} = M_{n+2} e^{i\Omega\tau}.$$

Одержуємо

$$\begin{aligned}
R_j &= \ddot{\alpha}_j + h_j(\dot{\alpha}_j + \Omega - R_\omega) - \frac{i\tilde{R}_m R_j}{2} [(\dot{s} + 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 s)e^{-i\alpha_j} - \\
&\quad - (\ddot{s} - 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 \bar{s})e^{i\alpha_j}] = 0, \quad / j = \overline{1, n}/; \\
R_{n+1} &= \dot{s} + 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 s + H(\dot{s} + i\Omega s) + s - \\
&\quad - \sum_{j=1}^n e_j(\dot{\alpha}_j^2 + 2\Omega\dot{\alpha}_j + \Omega^2 - i\ddot{\alpha}_j)e^{i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2 e^{i(R_\omega - \Omega)\tau}; \quad R_{n+2} = \bar{R}_{n+1}. \quad (5.42)
\end{aligned}$$

Якщо КВ однакові, то система (5.42) приймає вигляд

$$\begin{aligned}
R_j &= \ddot{\alpha}_j + h(\dot{\alpha}_j + \Omega - R_\omega) - i\tilde{R}_m [(\dot{s} + 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 s)e^{-i\alpha_j} - \\
&\quad - (\ddot{s} - 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 \bar{s})e^{i\alpha_j}] = 0, \quad / j = \overline{1, n}/; \\
R_{n+1} &= \dot{s} + 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 s + H(\dot{s} + i\Omega s) + s - \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\dot{\alpha}_j^2 + 2\Omega\dot{\alpha}_j + \Omega^2 - i\ddot{\alpha}_j)e^{i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2 e^{i(R_\omega - \Omega)\tau}; \quad R_{n+2} = \bar{R}_{n+1}. \quad (5.43)
\end{aligned}$$

Перейдемо до системи координат, що синхронно обертається разом з ротором:  $\Omega = R_\omega$ . Система (5.42) приймає вигляд

$$\begin{aligned}
R_j &= \ddot{\alpha}_j + h_j \dot{\alpha}_j - \frac{iR_m j}{2} [(\dot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s)e^{-i\alpha_j} - (\ddot{s} - 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 \bar{s})e^{i\alpha_j}] = 0, \quad / j = \overline{1, n}/, \\
R_{n+1} &= \dot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s - \\
&\quad - \sum_{j=1}^n e_j(\dot{\alpha}_j^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + R_\omega^2 - i\ddot{\alpha}_j)e^{i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2, \\
R_{n+2} &= \ddot{s} - 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 \bar{s} + H(\dot{s} - iR_\omega \bar{s}) + \bar{s} - \\
&\quad - \sum_{j=1}^n e_j(\dot{\alpha}_j^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + R_\omega^2 + i\ddot{\alpha}_j)e^{-i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2. \quad (5.44)
\end{aligned}$$

Якщо КВ однакові, то система (5.44) приймає вигляд

$$\begin{aligned}
R_j &= \ddot{\alpha}_j + h\dot{\alpha}_j - i\tilde{R}_m [(\dot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s)e^{-i\alpha_j} - (\ddot{s} - 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 \bar{s})e^{i\alpha_j}] = 0, \quad / j = \overline{1, n}/, \\
R_{n+1} &= \dot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s - \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\dot{\alpha}_j^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + R_\omega^2 - i\ddot{\alpha}_j)e^{i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2, \\
R_{n+2} &= \ddot{s} - 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 \bar{s} + H(\dot{s} - iR_\omega \bar{s}) + \bar{s} - \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\dot{\alpha}_j^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + R_\omega^2 + i\ddot{\alpha}_j)e^{-i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2. \quad (5.45)
\end{aligned}$$

Введемо дійсні координати у рухомій системі координат  

$$u = (s + \bar{s})/2, \quad v = (s - \bar{s})/2i. \quad (5.46)$$

В них диференціальні рівняння руху (5.44) перетворюються до вигляду  

$$r_j = \ddot{\alpha}_j + h_j \dot{\alpha}_j - R_{mj} [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \alpha_j - (\dot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \alpha_j] = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$r_{n+1} = \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u -$$

$$- \sum_{j=1}^n e_j [\ddot{\alpha}_j \sin \alpha_j + (R_\omega^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_j^2) \cos \alpha_j] - e_0 R_\omega^2 = 0,$$

$$r_{n+2} = \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v -$$

$$+ \sum_{j=1}^n e_j [\ddot{\alpha}_j \cos \alpha_j - (R_\omega^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_j^2) \sin \alpha_j] = 0. \quad (5.47)$$

Якщо КВ однакові, то система (5.47) приймає вигляд  

$$r_j = \ddot{\alpha}_j + h \dot{\alpha}_j - 2\tilde{R}_m [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \alpha_j - (\dot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \alpha_j] = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$r_{n+1} = \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\ddot{\alpha}_j \sin \alpha_j + (R_\omega^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_j^2) \cos \alpha_j] - e_0 R_\omega^2 = 0,$$

$$r_{n+2} = \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v -$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\ddot{\alpha}_j \cos \alpha_j - (R_\omega^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_j^2) \sin \alpha_j] = 0. \quad (5.48)$$

У подальшому припускаємо, що ротор утримується ізотропними опорами і обертається із сталою кутовою швидкістю. Тоді, у випадку різних КВ об'єктом досліджень будуть системи (5.34), (5.39), чи (5.42), (5.44), (5.47). У випадку однакових КВ об'єктами досліджень будуть системи (5.36), (5.40), чи (5.43), (5.45), (5.48).

## 5.2. Дослідження кількості і умов існування усталених рухів системи, у яких КВ обертаються синхронно з ротором

Знайдемо усталені рухи, у яких КВ обертаються синхронно з ротором. Для виділення цих рухів використовуємо диференціальні рівняння руху системи у вигляді (5.44). В усталених рухах похідні дорівнюють нулю і рівняння (5.44) приймають вигляд

$$R_j = \frac{iR_{mj}}{2} R_\omega^2 (\tilde{s} e^{-i\tilde{\alpha}_j} - \tilde{\bar{s}} e^{i\tilde{\alpha}_j}) = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$R_{n+1} = [(1 - R_\omega^2) + iHR_\omega] \tilde{s} - R_\omega^2 \left( \sum_{j=1}^n e_j e^{i\tilde{\alpha}_j} + e_0 \right) = 0,$$

$$R_{n+2} = [(1 - R_\omega^2) - iHR_\omega] \tilde{s} - R_\omega^2 \left( \sum_{j=1}^n e_j e^{-i\tilde{\alpha}_j} + e_0 \right) = 0, \quad (5.49)$$

де  $\tilde{s}, \tilde{\tilde{s}}, \tilde{\alpha}_j / j = \overline{1, n/}$  - сталі параметри, що визначають усталений рух.

В основних рухах ротор зрівноважений і відсутнє відхилення вала від осі обертання:

$$\tilde{s} = \tilde{\tilde{s}} = 0, \quad \sum_{j=1}^n e_j e^{i\tilde{\alpha}_j} + e_0 = 0, \quad \sum_{j=1}^n e_j e^{-i\tilde{\alpha}_j} + e_0 = 0. \quad (5.50)$$

Якщо  $n \geq 3$ , то у системи сім'я основних рухів. Будемо розрізняти одну сім'ю основних рухів від іншої за дисбалансом  $e_0$ , який зрівноважується.

В побічних рухах ротор не зрівноважений і вал відхилений від осі обертання. Перші  $n$  рівнянь в (5.49) будуть виконуватися, якщо

$$\tilde{s} e^{-i\tilde{\gamma}} - \tilde{\tilde{s}} e^{i\tilde{\gamma}} = 0, \quad \alpha_j = \tilde{\gamma} + k_j \pi, \quad k_j = 0, 1; \quad / j = \overline{1, n/}, \quad (5.51)$$

де  $\tilde{\gamma}$  - деякий кут.

Тоді останні два рівняння в (5.49) зведуться до вигляду

$$R_{n+1} = [(1 - R_\omega^2) + iHR_\omega] \tilde{s} - R_\omega^2 \left[ e^{i\tilde{\gamma}} \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} e_j + e_0 \right] = 0,$$

$$R_{n+2} = [(1 - R_\omega^2) - iHR_\omega] \tilde{s} - R_\omega^2 \left[ e^{-i\tilde{\gamma}} \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} e_j + e_0 \right] = 0. \quad (5.52)$$

Введемо у розглядання  $n$  - розрядне двійкове число

$$k = k_n \dots k_1. \quad (5.53)$$

У десятковій системі числення  $k = 0, 1, 2, \dots, (2^n - 1)$ , тобто всього  $2^n$  можливих комбінацій. Введемо позначення

$$e(k) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} e_j. \quad (5.54)$$

Із способу введення числа  $k$  випливають такі його властивості:

- кожному додатному (від'ємному) числу  $e(k)$  відповідає рівне за модулем від'ємне (додатне) число  $e(2^n - 1 - k)$

$$e(k) = -e(2^n - 1 - k); \quad (5.55)$$

- кількість від'ємних і додатних  $e(k)$  однакова, а кількість нульових - парна.

Тоді система (5.51) прийме вигляд

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= [(1 - R_{\omega}^2) + iHR_{\omega}] \tilde{s} - R_{\omega}^2 [e^{i\tilde{\gamma}} e(k) + e_0] = 0, \\ R_{n+2} &= [(1 - R_{\omega}^2) - iHR_{\omega}] \tilde{s} - R_{\omega}^2 [e^{-i\tilde{\gamma}} e(k) + e_0] = 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Зробимо заміну змінних

$$\tilde{u} = \frac{i}{2} (\tilde{s} e^{-i\tilde{\gamma}} - \tilde{s} e^{i\tilde{\gamma}}), \quad \tilde{v} = \frac{1}{2} (\tilde{s} e^{-i\tilde{\gamma}} + \tilde{s} e^{i\tilde{\gamma}}).$$

Зауважимо, що  $\tilde{u}, \tilde{v}$  - дійсні змінні. Тоді системи рівнянь (5.51), (5.56) зведуться до вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= 0, \\ (R_{n+1} e^{-i\tilde{\gamma}} + R_{n+2} e^{i\tilde{\gamma}}) / 2 &= (1 - R_{\omega}^2) \tilde{v} - R_{\omega}^2 [e(k) + e_0 \cos \tilde{\gamma}] = 0, \\ (R_{n+1} e^{-i\tilde{\gamma}} - R_{n+2} e^{i\tilde{\gamma}}) / 2 &= HR_{\omega} \tilde{v} - R_{\omega}^2 e_0 \sin \tilde{\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Оскільки  $\tilde{u} = 0$ , то  $|\tilde{v}|$  - безрозмірний прогин вала.

### 1. Розглянемо випадок відсутності зовнішніх сил опору ( $H=0$ ).

Система (5.57) прийме вигляд

$$\tilde{u} = 0, \quad (1 - R_{\omega}^2) \tilde{v} - R_{\omega}^2 [e(k) + e_0 \cos \tilde{\gamma}] = 0, \quad -R_{\omega}^2 e_0 \sin \tilde{\gamma} = 0. \quad (5.58)$$

Відповідно до останнього рівняння, виділяємо такі випадки.

а) Випадок, коли

$$\sin \gamma = 0, \quad e_0 \neq 0. \quad (5.59)$$

Оскільки при заміні кута  $\gamma$  на кут  $(\gamma + \pi)$  маятники (кулі) змінюють орієнтацію з  $e(k)$  на  $e(2^n - 1 - k)$ , то у подальшому, не обмежуючи загальності, приймаємо, що

$$\gamma = 0, \quad (\cos \gamma = 1). \quad (5.60)$$

Тоді з системи (5.58) знаходимо

$$\tilde{u}(k) = 0, \quad \tilde{v}(k) = \frac{R_{\omega}^2 [e_0 + e(k)]}{1 - R_{\omega}^2}, \quad \gamma(k) = 0 \quad / k = 0, 2^n - 1 / . \quad (5.61)$$

Отже, всього маємо до  $2^n$  різних побічних усталених рухів, у яких:

- кожен маятник відхилений у важкий, чи легкий бік ротора так, що у сумі вони створюють дисбаланс з важкого  $e(k) > 0$ , чи легкого  $e(k) < 0$  боку ротора, або зовсім дисбаланс не створюють  $e(k) = 0$ ;
- кожному побічному руху  $k$  відповідає рух  $(2^n - 1 - k)$ , у якому маятники відхилені у протилежний бік, і тому кількість рухів, у яких сумарний дисбаланс маятників з важкого боку ротора дорівнює кількості рухів, у яких сумарний дисбаланс маятників з легкого боку ротора;
- сумарний дисбаланс системи дорівнює  $(e_0 + e(k))$  і лежить на лінії дисбалансу ротора;

- на дорезонансних швидкостях обертання ротора вал відхиляється у бік вектора сумарного дисбалансу системи, а на зарезонансних – у протилежний бік.

б) Випадок, коли

$$e_0 = 0. \quad (5.62)$$

З (5.58) знаходимо

$$\tilde{u}(k) = 0, \quad \tilde{v}(k) = \frac{R_\omega^2 e(k)}{1 - R_\omega^2}, \quad \gamma(k) \in R, \quad k \in \{0, 1, \dots, (2^{n-1} - 1) : e(k) \neq 0\}. \quad (5.63)$$

Зауважимо, що:

- якщо  $e(k) = 0$ , то це основний рух і тому відповідні випадки виключені;
- значення  $k \in \{2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n - 1\}$  охоплюються довільністю параметрів  $\gamma(k)$ , бо при заміні кута  $\gamma$  на кут  $(\gamma + \pi)$  маятники (кулі) змінюють орієнтацію з  $e(k)$  на  $e(2^n - 1 - k)$ ;
- на дорезонансних швидкостях обертання ротора вал відхиляється у бік вектора сумарного дисбалансу маятників, а на зарезонансних – у протилежний бік.

Отже, маємо до  $2^{n-1}$  однопараметричних сімей побічних усталених рухів.

## 2. Розглянемо випадок наявності зовнішніх сил опору ( $H \neq 0$ ).

Шукаємо аналоги рухів, знайдених при відсутності сил опору. З останнього рівняння в (5.57) видно, що не існують аналоги побічних рухів (5.63), що виникали при відсутності дисбалансу.

Шукаємо аналоги рухів (5.61). З останніх двох рівнянь в (5.57) знаходимо такі рівняння для визначення  $\gamma$  і  $\tilde{v}$ :

$$(1 - R_\omega^2)e_0 \sin \tilde{\gamma} - HR_\omega[e(k) + e_0 \cos \tilde{\gamma}] = 0, \quad \tilde{v} = \frac{R_\omega^2[e(k) + e_0 \cos \tilde{\gamma}]}{1 - R_\omega^2}. \quad (5.64)$$

Формально систему (5.64) можна розв'язувати так: з першого рівняння визначається  $\gamma(k)$ , яке підставляється у друге рівняння для визначення  $\tilde{v}(k)$ . Перетворимо перше рівняння в (5.64) до вигляду

$$HR_\omega[e_0 - e(k)] \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + 2e_0(R_\omega^2 - 1) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - HR_\omega[e_0 + e(k)] = 0. \quad (5.65)$$

Його розв'язки

$$\tilde{\gamma}(k)_{1/2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{-e_0(R_\omega^2 - 1) \pm \sqrt{e_0^2(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2 [e_0^2 - e^2(k)]}}{HR_\omega[e_0 - e(k)]}, \quad /k = 0, 2^n - 1/. \quad (5.66)$$

Рівності (5.66) не дають зв'язку між формальними розв'язками і рухами, у випадку відсутності сил опору. Для встановлення такого зв'язку дослідимо якісну поведінку розв'язків. Розв'язуємо перше рівняння в (5.64) відносно  $R_\omega$ :

$$R_{\omega/2}(\gamma) = \frac{H[e(k) + e_0 \cos \gamma] \pm \sqrt{H^2[e(k) + e_0 \cos \gamma]^2 + 4e_0^2 \sin^2 \gamma}}{2e_0 \sin \gamma}. \quad (5.67)$$

Нас цікавлять додатні кутові швидкості. Визначимо, чи є у функції (5.67) екстремум. Знаходимо похідні

$$\frac{dR_{\omega/2}(\gamma)}{d\gamma} = \frac{\mp H[e(k) \cos \gamma + e_0] R_{\omega/2}(\gamma)}{\sin \gamma \sqrt{H^2[e(k) + e_0 \cos \gamma]^2 + 4e_0^2 \sin^2 \gamma}}. \quad (5.68)$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що  $e(k) > 0$ . З (5.67) і (5.68) випливає, що екстремум існує (похідна може приймати нульове значення) тільки при таких умовах

$$e(k) > e_0, \quad \gamma_{k1/2}^* = \pm \left[ \pi - \arccos \frac{e_0}{e(k)} \right]. \quad (5.69)$$

В інших випадках кутові швидкості є монотонними функціями  $\gamma$ . На рис. 5.3 побудовані у полярній системі координат графіки  $R_{\omega/2}(\gamma)$ . Розглядаємо різні випадки.

а) Випадок, коли  $|e(k)| > e_0$ . Графіки зображені на рис. 5.2, а. У кутових швидкостей два екстремуми:

$$R_{\omega/2}^* = \frac{\sqrt{4e_0^2 + H^2[e^2(k) - e_0^2]} \mp H\sqrt{e^2(k) - e_0^2}}{2e_0},$$

$$0 < R_{\omega 1}^* < 1 < R_{\omega 2}^*, \quad R_{\omega 1}^* R_{\omega 2}^* = 1. \quad (5.70)$$

Умова існування побічних рухів

$$R_\omega \in (0, R_{\omega 1}^*] \cup [R_{\omega 2}^*, +\infty). \quad (5.71)$$

З (5.70) і (5.54) випливає, що рухи  $k$  і  $(2^n - 1 - k)$  мають однакові умови існування. З рис. 5.2, а видно, що при  $R_\omega \sim 0$  спільний центр маятників відхилений у важкий бік ротора ( $\gamma \sim 0$ ), або у легкий ( $\gamma \sim \pi$ ). Перший випадок відповідає руху  $k$ , а другий -  $(2^n - 1 - k)$ . Із збільшенням  $R_\omega$  спільний центр мас маятників у русі  $k$  повертається за ходом стрілки годинника, а у русі  $(2^n - 1 - k)$  - проти. При  $R_\omega = R_{\omega 1}^*$  два рухи зливаються ( $\gamma \sim -[\pi - \arccos e_0/e(k)]$ ), а при переході через  $R_{\omega 1}^*$  - зникають. Отже, відбувається біфуркація положень рівноваги системи. При  $R_\omega = R_{\omega 2}^*$  два рухи знову з'являються, причому при цьому вони співпадають (



$\gamma \sim [\pi - \arccos e_0/e(k)]$ ), а при переході через  $R_{\omega 2}^*$  – вони розділяються. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора ( $R_{\omega} \rightarrow +\infty$ ) у русі  $k$  кут  $\gamma$  прямує до  $+0$ , а у русі  $(2^n-1-k)$  - до  $\pi-0$ .

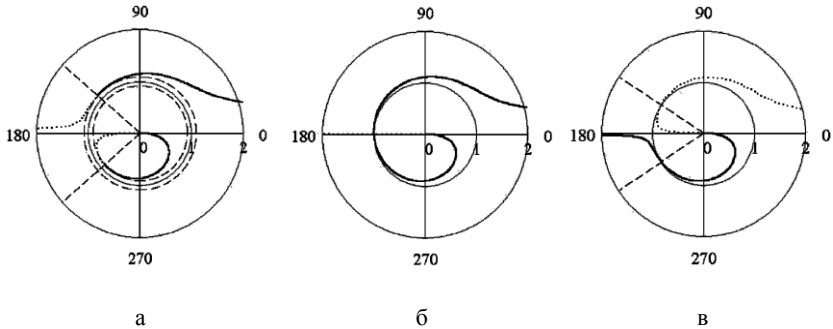


Рис. 5.2. До класифікації побічних усталених рухів при наявності сил опору:  
 а – випадок, коли  $e_0 < |e(k)|$ ; б – випадок, коли  $e_0 = |e(k)|$ ;  
 в – випадок, коли  $e_0 > |e(k)|$

б) Випадок, коли  $e_0 = |e(k)|$ . Графіки зображені на рис. 5.2, б. У русі  $k$  спільний центр мас маятників початково відхилений у важкий бік ротора, а у русі  $(2^n-1-k)$  - у легкий. В другому русі ротор зрівноважений і тому це основний рух. У русі  $k$  із збільшенням кутової швидкості обертання ротора спільний центр мас КВ починає повертатися за ходом стрілки годинника. При досягненні резонансної швидкості обертання ротора ( $R_{\omega} = 1$ ) цей кут дорівнює  $-\pi$ . При цьому основний і побічний рухи зливаються. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора  $R_{\omega} \rightarrow +\infty$  рух  $k$  відходить від основного руху і кут повороту  $\gamma$  прямує до  $(-2\pi+0)$ , або до  $+0$ .

в) Випадок, коли  $|e(k)| < e_0$ . Графіки зображені на рис. 5.2, в. Видно, що при  $R_{\omega} \sim 0$  спільний центр мас маятників відхилений у важкий бік ротора ( $\gamma \sim 0$ ), або у легкий ( $\gamma \sim \pi$ ). Перший випадок відповідає руху  $k$ , а другий -  $(2^n-1-k)$ . Із збільшенням  $R_{\omega}$  спільний центр мас КВ у двох рухах повертається за ходом стрілки годинника. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора ( $R_{\omega} \rightarrow +\infty$ ) у русі  $k$  кут  $\gamma$  прямує до  $(-\pi+0)$ , а у русі  $(2^n-1-k)$  - до  $+0$ , тобто рухи “мінються”

місцями. В цьому випадку рухи ділимо за положенням спільного центра мас КВ при  $R_\omega = 0$ .

Для остаточної класифікації побічних усталених рухів введемо нову нумерацію для  $e(k)$ . Розташуємо  $e(k)$  у порядку спадання, відкинемо від'ємні величини, а серед нульових - відкинемо половину рухів, яка одержується із залишених поворотом маятників на  $180^\circ$ . Введемо нову нумерацію:

$$e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_{2^{n-1}}. \quad (5.72)$$

Зауважимо, що  $e_1=1$ . З властивості (5.54) для  $e(k)$  випливає, що таких значень буде  $2^{n-1}$ . Кожному значенню  $e_j$  відповідає пара побічних усталених рухів, зображених на рис. 5.2. У найбільш загальному випадку ці рухи будуть різними. Аналітично рухи визначаються наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{k1} &= \begin{cases} \tilde{\gamma}(k)_1, & (R_\omega \leq R_{\omega 1}^*(k) \wedge e_k > e_0) \vee (e_k \leq e_0); \\ \tilde{\gamma}(k)_2, & R_\omega > R_{\omega 2}^*(k) \wedge e_k > e_0, \end{cases} \\ \tilde{\gamma}_{k2} &= \begin{cases} \tilde{\gamma}(k)_2, & (R_\omega \leq R_{\omega 1}^*(k) \wedge e_k > e_0) \vee (e_k \leq e_0); \\ \tilde{\gamma}(k)_1, & R_\omega > R_{\omega 2}^*(k) \wedge e_k > e_0, \end{cases} \\ \tilde{\gamma}_{k1/2} &= \frac{R_\omega^2(e_k + e_0 \cos \tilde{\gamma}_{k1/2})}{1 - R_\omega^2}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(k)_{1/2} &= 2 \arctg \frac{-e_0(R_\omega^2 - 1) \pm \sqrt{e_0^2(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2(e_0^2 - e_k^2)}}{H R_\omega(e_0 - e_k)}, \\ R_{\omega 1/2}^*(k) &= \frac{\sqrt{4e_0^2 + H^2(e_k^2 - e_0^2)} \mp H \sqrt{e_k^2 - e_0^2}}{2e_0}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

У випадку однакових КВ

$$e_k = 1 - 2k/n, \quad 2k \leq n. \quad (5.75)$$

Тому у системи  $(n+1)$  істотно відмінних побічних рухів, причому:

- у випадку парних  $n$  – дві сукупності по  $n/2$  рухів, у яких спільний центр мас КВ початково відхилений відповідно у важкий чи легкий бік ротора і один рух, у якому  $e_k = 0$ ;
- у випадку непарних  $n$  – дві сукупності по  $(n+1)/2$  рухів, у яких спільний центр мас КВ початково відхилений відповідно у важкий чи легкий бік ротора.

### 5.3. Дослідження стійкості основних рухів у випадку, коли смності АБП вистачає для зрівноваження ротора

#### 5.3.1. Одержання характеристичного рівняння

**Одержання характеристичного рівняння.** Використовуємо диференціальні рівняння руху у вигляді (5.43). Вводимо узагальнені координати, що характеризують зрівноваження ротора у двох напрямках:

$$u = e_0 + \sum_{j=1}^n e_j \cos \varphi_j, \quad v = \sum_{j=1}^n e_j \sin \varphi_j. \quad (5.76)$$

Вводимо комплексні змінні

$$\psi = u + iv = e_0 + \sum_{j=1}^n e_j e^{i\alpha_j}, \quad \bar{\psi} = u - iv = e_0 + \sum_{j=1}^n e_j e^{-i\alpha_j}. \quad (5.77)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= i \sum_{j=1}^n e_j \dot{\alpha}_j e^{i\alpha_j}, \quad \ddot{\psi} = \sum_{j=1}^n e_j (i\ddot{\alpha}_j - \dot{\alpha}_j^2) e^{i\alpha_j}, \\ \dot{\bar{\psi}} &= -i \sum_{j=1}^n e_j \dot{\alpha}_j e^{-i\alpha_j}, \quad \ddot{\bar{\psi}} = -\sum_{j=1}^n e_j (i\ddot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_j^2) e^{-i\alpha_j}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

і останні два рівняння системи (5.43) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s + \dot{\psi} + 2iR_\omega \dot{\psi} - R_\omega^2 \psi = 0, \\ R_{n+2} &= \ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s} + H(\dot{\bar{s}} - iR_\omega \bar{s}) + \bar{s} + \dot{\bar{\psi}} - 2iR_\omega \dot{\bar{\psi}} - R_\omega^2 \bar{\psi} = 0. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Введемо позначення

$$h = \sum_{j=1}^n h_j / n, \quad b_{11} = \sum_{j=1}^n j_j e_j, \quad b_{12} = \sum_{j=1}^n j_j e_j e^{2i\alpha_j}, \quad \bar{b}_{12} = \sum_{j=1}^n j_j e_j e^{-2i\alpha_j}, \quad (5.80)$$

де  $h$  – середнє тертя;  $b_{11}$  – сталий параметр;  $b_{12}, \bar{b}_{12}$  – функції положень КВ.

Тоді з перших  $n$  рівнянь в (5.43) можна одержати два таких рівняння

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n R_j \cdot i e_j e^{i\alpha_j} &= \dot{\psi} + h\dot{\psi} + \sum_{j=1}^n e_j \dot{\alpha}_j^2 e^{i\alpha_j} + \sum_{j=1}^n i(h_j - h)e_j \dot{\alpha}_j e^{i\alpha_j} + \\ &+ \frac{R_m}{2} [b_{11}(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) - b_{12}(\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s})], \\ - \sum_{j=1}^n R_j \cdot i e_j e^{-i\alpha_j} &= \dot{\bar{\psi}} + h\dot{\bar{\psi}} + \sum_{j=1}^n e_j \dot{\alpha}_j^2 e^{-i\alpha_j} - \sum_{j=1}^n i(h_j - h)e_j \dot{\alpha}_j e^{-i\alpha_j} + \\ &+ \frac{R_m}{2} [-\bar{b}_{12}(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) + b_{11}(\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s})]. \end{aligned} \quad (5.81)$$

У подальшому будемо розглядати випадок рівних сил опору:

$$h_j = h, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (5.82)$$

або випадок їх відсутності

$$h_j = 0, \quad / j = \overline{1, n} / . \quad (5.83)$$

При невеликих відхиленнях системи від сім'ї основних рухів

$$|s_j|, |\dot{s}_j|, |\ddot{s}_j|, |\psi_j|, |\dot{\psi}_j|, |\ddot{\psi}_j|, |\dot{\alpha}_j|, |\ddot{\alpha}_j| \ll 1, \quad / j = \overline{1, n} / . \quad (5.84)$$

Тоді після лінійзації рівняння (5.79), (5.81) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s + \ddot{\psi} + 2iR_\omega \dot{\psi} - R_\omega^2 \psi &= 0, \\ \ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s} + H(\dot{\bar{s}} - iR_\omega \bar{s}) + \bar{s} + \ddot{\bar{\psi}} - 2iR_\omega \dot{\bar{\psi}} - R_\omega^2 \bar{\psi} &= 0, \\ \ddot{\psi} + h\dot{\psi} + \frac{R_m}{2} [b_{11}(\dot{s} + 2iR_\omega s - R_\omega^2 s) - \tilde{b}_{12}(\ddot{s} - 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 \bar{s})], \\ \ddot{\bar{\psi}} + h\dot{\bar{\psi}} + \frac{R_m}{2} [-\tilde{b}_{12}(\dot{s} + 2iR_\omega s - R_\omega^2 s) + b_{11}(\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s})], \end{aligned} \quad (5.85)$$

де

$$\tilde{b}_{12} = \sum_{j=1}^n j_j e_j e^{2i\tilde{\alpha}_j}, \quad \bar{\tilde{b}}_{12} = \sum_{j=1}^n j_j e_j e^{-2i\tilde{\alpha}_j} \quad (5.86)$$

- сталі параметри, обчислені на поточному основному русі із сім'ї, навколо якого коливається система. Слід зауважити, що одній сім'ї основних рухів можуть відповідати різні значення параметрів  $\tilde{b}_{12}$ ,  $\bar{\tilde{b}}_{12}$ . Під час руху системи можливий перехід системи з одного основного руху сім'ї на її інший рух. Тому стійкість сім'ї основних рухів треба вивчати для всіх можливих значень параметрів  $\tilde{b}_{12}$ ,  $\bar{\tilde{b}}_{12}$ .

Введемо позначення

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \quad a_{33} = \lambda^2 + h\lambda. \quad (5.87)$$

Тоді характеристичне рівняння системи (5.85) задає визначник

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{11} & 0 & \bar{a}_{13} \\ \frac{R_m}{2} b_{11} a_{13} & -\frac{R_m}{2} \tilde{b}_{12} \bar{a}_{13} & a_{33} & 0 \\ -\frac{R_m}{2} \tilde{b}_{12} a_{13} & \frac{R_m}{2} b_{11} a_{13} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \left( a_{11} a_{33} - \frac{R_m}{2} b_{11} a_{31}^2 \right) \left( \bar{a}_{11} a_{33} - \frac{R_m}{2} b_{11} \bar{a}_{31}^2 \right) - \frac{R_m^2}{4} \tilde{b}_{12} \bar{\tilde{b}}_{12} a_{31}^2 \bar{a}_{31}^2 = 0, \end{aligned}$$

де знак комплексного спряження над  $a_{ij}$  до  $\lambda$  не відноситься. Введемо позначення

$$\begin{aligned} \tilde{R}_m &= \frac{R_m b_{11}}{2} = \frac{1}{2M_\Sigma} \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2 l_j^2}{J_j}, \quad 0 < \tilde{R}_m < 0,5, \\ d^2 &= \frac{\tilde{b}_{12} \tilde{b}_{12}}{b_{11}^2} = \frac{\left( \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2 l_j^2 e^{2i\tilde{\alpha}_j}}{J_j} \right) \left( \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2 l_j^2 e^{-2i\tilde{\alpha}_j}}{J_j} \right)}{\left( \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2 l_j^2}{J_j} \right)^2}, \quad 0 \leq d \leq 1. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Параметр  $m_j^2 l_j^2 / J_j$  можна вважати ефективною масою  $j$ -го КВ, бо вона тим більша, чим більша його балансувальна ємність у порівнянні з осьовим моментом інерції. Тоді  $\tilde{R}_m$  - це половина відношення ефективної маси всіх КВ до маси всієї системи. На практиці  $\tilde{R}_m \ll 1$ . Параметр  $d^2$  характеризує певний основний рух із сім'ї, що відповідає поточному дисбалансу. Якщо  $0 \leq e_0 \leq 1$ , то  $0 \leq d \leq 1$ .

З врахуванням введених позначень характеристичне рівняння в неявному вигляді приймає такий вигляд

$$D = (a_{11} a_{33} - \tilde{R}_m a_{31}^2)(\bar{a}_{11} a_{33} - \tilde{R}_m \bar{a}_{31}^2) - \tilde{R}_m^2 a_{31}^2 \bar{a}_{31}^2 d^2 = 0. \quad (5.89)$$

де знак комплексного спряження над  $a_{ij}$  до  $\lambda$  не відноситься.

У явному вигляді характеристичне рівняння (5.89) має вигляд:

$$\begin{aligned} D &= a_8 \lambda^8 + \dots + a_1 \lambda + a_0, \\ a_0 &= \tilde{R}_m^2 R_\omega^8 (1 - d^2), \quad a_1 = 2h \tilde{R}_m R_\omega^4 (R_\omega^2 - 1), \\ a_2 &= [(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2] h^2 + 2\tilde{R}_m R_\omega^4 (R_\omega^2 - 1 + 3hH) + 4\tilde{R}_m^2 R_\omega^6 (1 - d^2), \\ a_3 &= 2\{[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2 + \tilde{R}_m R_\omega^2 (6 + R_\omega^2)]h + 3\tilde{R}_m R_\omega^4 H + (R_\omega^2 + 1)h^2 H\}, \\ a_4 &= (R_\omega^2 - 1)^2 + (H^2 + 2h^2 + 4hH)R_\omega^2 + h^2 H^2 + 2h^2 + 4hH + \\ &\quad + 2\tilde{R}_m R_\omega^2 (R_\omega^2 + 6 + 2hH) + 6\tilde{R}_m^2 R_\omega^4 (1 - d^2), \\ a_5 &= 2\{h(2 - \tilde{R}_m)(R_\omega^2 + 1) + H[(1 + 2\tilde{R}_m)R_\omega^2 + 1] + hH(h + H)\}, \\ a_6 &= 2(1 - \tilde{R}_m)(R_\omega^2 + 1 + Hh) + (h + H)^2 + 4\tilde{R}_m^2 R_\omega^2 (1 - d^2), \\ a_7 &= 2(h + H)(1 - \tilde{R}_m), \quad a_8 = 1 - 2\tilde{R}_m + \tilde{R}_m^2 (1 - d^2). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Таким чином, стійкість сім'ї основних рухів залежить від п'яти істотно відмінних незалежних параметрів:

$$0 < \tilde{R}_m < 0,5; \quad 0 \leq d \leq 1; \quad R_\omega, h, H > 0. \quad (5.91)$$

З наслідків з теореми Вієта випливає, що:

- 1) основний рух може бути стійким тільки на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $\forall j a_j > 0$  якщо  $R_\omega > 1$ ), а на дорезонансних – нестійкий ( $a_1 < 0$  якщо  $R_\omega < 1$ );
- 2) при обертанні ротора з критичною швидкістю у полінома (5.90) можуть з'являтися тільки пари уявних комплексно спряжених коренів ( $a_0 \neq 0$ ).

**Оцінка величин безрозмірних параметрів.** Будемо досліджувати стійкість у ряді граничних випадків, важливих з точки зору практики. Для цього зробимо оцінку порядку параметрів (5.91). На практиці параметр  $R_m$  набагато менший за 1 і змінюється в межах  $0,001 \div 0,05$ . Пояснюється це наступним.

а) У ротора на жорстких опорах навіть невеликий дисбаланс викликає значні реакції в опорах, бо відцентрові сили пропорційні квадрату кутової швидкості і відстані від центра мас ротора до осі обертання практично не змінюються. Такі ротори – шпindelі шліфувальних, фрезерних, токарних верстатів і т.п. важко розганяти із-за можливого руйнування чи пошкодження опор. В них параметр  $R_m$  приймає найменші значення.

б) В роторах на гнучких опорах – екстракторів, сепараторів, центрифуг відцентрових машин, і т.п. ротор важко розігнати, бо він може битися об корпус машини. Особливо важко проходити резонансну швидкість ротора. В таких машинах перед розгоном ротора попередньо у роторі перерозподіляється речовина, що обробляється. Наприклад, барабан пральної машини обертається за певним алгоритмом до більш рівномірного розподілу білизни, а потім ротор розганяється. Із-за більшої гнучкості опор в таких машинах вдається збільшувати балансувальну ємність КВ і параметр  $R_m$  змінюється в межах  $-0,01 \div 0,05$ .

Межі зміни параметра  $d - 0 \div 1$ , що залежить від дисбалансу, який зрівноважується і конкретного основного руху з сім'ї, яка відповідає певному дисбалансу.

Не обмежуючи загальності, можна вважати швидкість обертання ротора  $R_\omega$  – додатним параметром. Для важливих з точки зору практики випадків він змінюється в межах від 2 до декількох тисяч. У роторів на жорстких опорах велика резонансна швидкість і ротор працює на невеликих зарезонансних швидкостях. У роторів на гнучких опорах резонансна частота складає  $1 \div 10$  Гц і ротор працює на швидкостях, які значно перевищують резонансну. Так, у сепараторах із змінною швидкістю сепарації  $R_\omega = 2 \div 10000$ .

Параметри  $h$ ,  $H$ , що характеризують сили в'язкого опору, обернено пропорційні резонансній частоті. Тому в роторах на жорстких опорах ці величини значно менші, ніж в роторах на гнучких опорах. Зовнішні сили опору (в опорах) важко збільшувати, в той час як внутрішні сили збільшуються поміщенням КВ у в'язке мастило. Тому внутрішні сили змінюються у більших межах, ніж зовнішні. Для оцінки меж зміни цих параметрів розглянемо рівняння малих коливань математичного маятника на горизонтальній осі [243]:

$$ml^2\varphi'' + Hl\varphi' + mg\varphi = 0,$$

де  $m$  – маса,  $l$  – довжина маятника;  $\varphi$  – кут відхилення маятника від вертикалі;  $H$  – коефіцієнт сил в'язкого опору;  $g$  – прискорення вільного падіння. Після приведення цього рівняння до безрозмірного вигляду воно приймає вигляд

$$\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + p^2\varphi = 0, \quad h = H/ml\omega_0, \quad p^2 = g/l\omega_0^2, \quad \dot{\varphi} = \omega_0\varphi', \quad (5.92)$$

де  $\omega_0$  – критична швидкість обертання ротора.

На практиці часто КВ поміщують у в'язке мастило, яке усуває коливальний рух маятника на горизонтальному валі. Умова відсутності коливального руху

$$h \geq 2p = \sqrt{\frac{2g}{l\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{2g}{l(2\pi n_0)^2}}, \quad (5.93)$$

де  $n_0$  – кількість обертів ротора за секунду на критичній швидкості обертання.

При  $l=0,125$  м і при зміні  $n_0=1\div 100$  Гц параметр  $h \geq 0,0002\div 2$ . Параметр  $H$  може бути ще меншим, бо збільшувати зовнішні сили опору складніше. Тому у подальшому будемо вважати, що

$$R_m = 0,0005\div 0,05; \quad R_\omega = 1\div 10000; \quad h = 0,0001\div 10; \quad H = 0,0001\div 1. \quad (5.94)$$

### 5.3.2. Випадок нехтування силами опору і деякі граничні випадки

Рівняння (5.89) збігається з характеристичним рівнянням, отриманим у роботі [143] для двохмаятникового (двохкульового) АБП. Це дозволяє скористатися результатами роботи й одержати наступні достатні умови асимптотичної стійкості сімей основних рухів поза залежністю від величини дисбалансу:

- у випадку, коли ефективна маса КВ набагато менша маси ротора, або у випадку великого тертя між маятниками і валом ( $h \gg 1$ )

$$|R_\omega| > 1; \quad (5.95)$$

- на великих зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_\omega \gg 1$ )

$$h > H\sqrt{R_m}; \quad (5.96)$$

- при великому зовнішньому терті ( $H \gg 1$ )

$$4R_m < h, \quad |R_\omega| \in (R_{\omega 1}, R_{\omega 2}), \quad (5.97)$$

де  $R_{\omega 1/2} = [1 \mp (1-p^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} / p$ ,  $p = (2R_m)^{\frac{1}{2}} / h$ .

Відмітимо, що умови (5.95) – (5.97) повинні виконуватися (не виконуватися) з точністю до величин, малих стосовно одиниці. Тому теоретично можливо, що на границі цих умов критична швидкість розпадається на непарне число швидкостей, що збігаються в нульовому наближенні. Швидкість обертання  $R_\omega = 1$  відповідає резонансній частоті – частоті власних коливань ротора при відсутності обертання, сил тертя і нерухомих маятників.

При відсутності сил опору  $H = h = 0$  і характеристичне рівняння (5.90) приймає вигляд

$$P(x, R_\omega^2, \tilde{R}_m, k) = (a_6 x^3 + a_4 x^2 + a_2 x + a_0)x + k(x + R_\omega^2)^4 = 0, \quad (5.98)$$

де

$$a_0 = 2\tilde{R}_m R_\omega^4 (R_\omega^2 - 1), \quad a_2 = (R_\omega^2 - 1)^2 + 2\tilde{R}_m R_\omega^2 (R_\omega^2 + 6), \\ a_4 = 2(1 - \tilde{R}_m)(R_\omega^2 + 1), \quad a_6 = 1 - 2\tilde{R}_m, \quad x = \lambda^2, \quad k = 1 - d^2.$$

Стійкість руху залежить від трьох незалежних параметрів

$$\tilde{R}_m \in (0, 0,5), \quad R_\omega \in [0, +\infty), \quad k \in [0,1). \quad (5.99)$$

Критичні швидкості – є функції вигляду  $R_{\omega j} = R_{\omega j}(\tilde{R}_m, k)$ . Вони розділяють на прямій  $R_\omega$  області стійкості в першому наближенні і нестійкості. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що  $R_\omega$ ,  $R_{\omega j}$  - додатні. Для стійкості руху в першому наближенні необхідно, щоб корені рівняння (5.98) були від'ємні. Побудуємо в площині  $(R_m, R_\omega)$  область стійкості в першому наближенні, що не залежить від дисбалансу.

При зміні дисбалансу змінюється тільки параметр  $k$ . При цьому крива  $P$  займає в площині  $(x, P)$  щонайнижче положення при  $k = 0$  і найвище – при  $k = 1$ . Якщо в цих двох крайніх положеннях поліном  $P$  буде мати всі від'ємні корені, то і при кожному  $k \in (0,1)$  у полінома всі корені будуть від'ємні. Відмітимо, що дійсні корені полінома  $P$  - монотонні функції від параметра  $k$ .

При  $k = 0$  поліном  $P$  приймає вигляд

$$P(x, R_\omega^2, R_m, k) = (a_6 x^3 + a_4 x^2 + a_2 x + a_0)x. \quad (5.100)$$



У нього один нульовий корінь. Для того, щоб всі інші корені були від'ємні, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

$$a_j > 0 \quad (j = 0, 2, 4, 6);$$

$$-a_2^2 a_4^2 + 4a_3^2 a_6 + 27a_0^2 a_6^2 - 18a_0 a_2 a_4 a_6 + 4a_0 a_4^3 \leq 0. \quad (5.101)$$

З першої групи умов знаходимо першу критичну швидкість

$$R_{\omega 1}(R_m, 0) = 1, \quad (5.102)$$

яка збігається з резонансною частотою. Інші швидкості за допомогою метода розкладання коренів полінома за степенями малого параметра [243] знаходимо у вигляді рядів (корені полінома (5.101)):

- для  $0 < R_m < 0,05$

$$R_{\omega 2}(R_m, 0) = 1 + \frac{49}{16} R_m + \frac{12397}{1024} R_m^2 + \dots$$

$$R_{\omega 3}(R_m, 0) = 1 + 2 \left( \frac{R_m}{2} \right)^{1/3} + \frac{7}{3} \left( \frac{R_m}{2} \right)^{2/3} + \frac{29}{8} \frac{R_m}{2} + \dots$$

- для  $0,05 \leq R_m < 0,25$

$$R_{\omega 2/3}(R_m, 0) = \frac{1}{8q^2} \left( 1 \pm 2q + \frac{11}{2} q^2 \mp \frac{37}{4} q^3 - \frac{155}{8} q^4 + \dots \right),$$

$$q = \sqrt{0,25 - R_m} / 2. \quad (5.103)$$

Таким чином, при  $k=0$  і  $0 < R_m < 0,25$  у системи три критичні швидкості, а при  $0,25 < R_m < 0,5$  - тільки одна. Розкладання (5.103) дають похибку на інтервалі  $(0, 0,25)$  не більш 7%, причому остання швидко зменшується при підході  $R_m$  до 0 або 0,25.

При  $k=1$  ( $\cos 2\psi_0 = 0$ ) характеристичне рівняння (5.98) розпадається на два рівняння:

$$P_1(R_{\omega}, R_m) = (a_{11} a_{33} - R_m a_{31}^2) = 0, \quad P_2(R_{\omega}, R_m) = (\bar{a}_{11} a_{33} - R_m \bar{a}_{31}^2) = 0, \quad (5.104)$$

корені яких комплексно спряжені. З умови, що у полінома  $P_{1(2)}$  повинні бути тільки уявні корені, визначається перша критична швидкість:

$$R_{\omega 1}(R_m, 1) = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-2u^2}, \quad R_m = \left( \frac{u^3}{1-2u^2} \right)^{1/2}, \quad (5.105)$$

де  $u$  - параметр. Те ж у вигляді розкладання за степенями  $R_m$ :

$$R_{\omega 1}(R_m, 1) = 1 + \frac{3}{2} (R_m)^{1/3} + \frac{7}{8} (R_m)^{2/3} + \frac{1}{48} R_m + \dots \quad (5.106)$$

Як показують безпосередні обчислення, розкладання (5.106) рівномірно придатне для обчислення  $R_{\omega 1}$  на всьому інтервалі зміни  $R_m$ . Відносна похибка не перевищує 1,08% і досягає максимуму при  $R_m = 0,5$ .

З умови, що у поліномів  $P_1$  і  $P_2$  з'являються рівні корені, визначаються друга і третя критичні швидкості:

$$R_{\omega 2/3}(R_m, 1) = \frac{\sqrt{2(1-2R_m)}}{1-4R_m}, \quad R_m^{(1)} < R_m < R_m^{(2)}, \quad (5.107)$$

де  $R_m^{(1)} = 0,04173\dots$ ,  $R_m^{(2)} = 0,25$ . При зменшенні параметра  $k$  особливі точки кривої (5.107) при  $0 < R_m < R_m^{(1)}$  і  $R_m^{(2)} < R_m < 0,5$  зникають. При  $R_m^{(1)} < R_m < R_m^{(2)}$  крива розщеплюється на дві, які визначають дві критичні швидкості.

На рис. 5.3 зображені графіки критичних швидкостей при  $k=0$  і  $k=1$ .

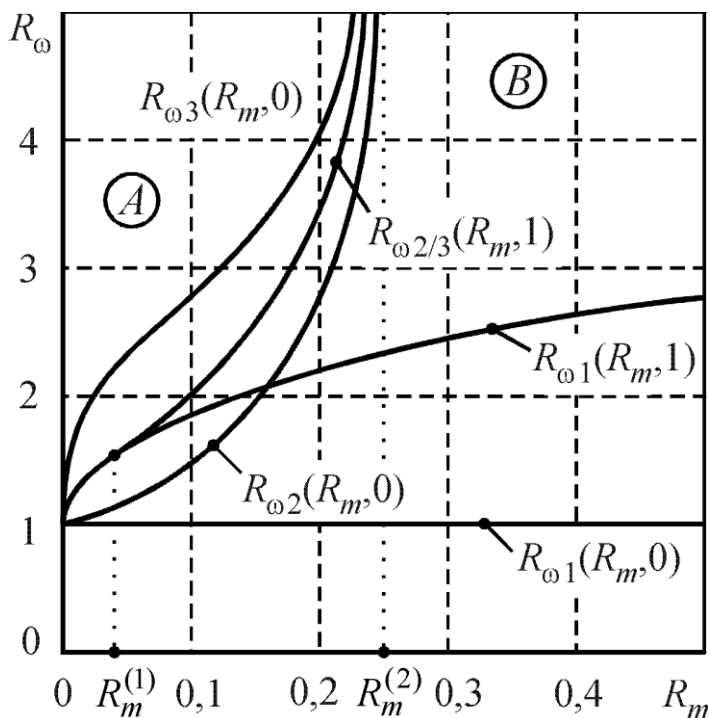


Рис. 5.3. Области стійкості сімей основних рухів

Перша і друга критичні швидкості – монотонно-спадаючі функції параметра  $k$ , а третя – монотонно-зростаюча функція. При  $k=1$  і  $R_m = R_m^{(1)}$  величини трьох критичних швидкостей збігаються. Більш того, криві мають у цій точці спільну дотичну. У цьому ж випадку збігаються величини другої і третьої критичних швидкостей. Із зменшенням  $k$  крива  $R_{\omega 2/3}(R_m, 1)$  розщеплюється на дві криві, що визначають дві критичні швидкості.

Рух у першому наближенні стійкий при обертанні ротора між першою і другою і над третьою критичними швидкостями. З огляду на це і на монотонність зміни критичних швидкостей від параметра  $k$ , визначаємо області А, В у площині  $(R_m, R_\omega)$ , усередині яких рух у першому наближенні стійкий поза залежністю від величини дисбалансу. Це область А над кривою  $R_{\omega 3}(R_m, 0)$  й область В між кривими  $R_{\omega 1}(R_m, 1)$  і  $R_{\omega 2}(R_m, 0)$ .

### 5.3.3. Граничні випадки при врахуванні сил опору

Нижче одержуються розкладання коренів характеристичного рівняння (5.89) у ряді важливих з точки зору практики випадків. Серед одержаних розкладань обирається таке, що найбільш широко охоплює різні випадки. Розкладання проводяться до появи дійсних частин коренів і за ними робляться попередні висновки про стійкість основних рухів.

1. Випадок, коли ефективна маса КВ набагато менша маси ротора:

$$\tilde{R}_m \ll 1. \quad (5.108)$$

Корені характеристичного рівняння (5.89) наближено визначаються такими розкладаннями, придатними для будь-яких значень  $d$ :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2 - iR_\omega + O(\tilde{R}_m)}, \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \quad \lambda_{5/6} = -h + O(\tilde{R}_m),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 \left( R_\omega^2 - 1 \pm \sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 d^2 - H^2 R_\omega^2 (1 - d^2)} \right)}{h[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2]} + O(\tilde{R}_m^2). \quad (5.109)$$

2. Випадок, коли ефективна маса КВ набагато менша маси ротора і великі сили внутрішнього опору:

$$\tilde{R}_m \ll 1, \quad h \sim 1/\tilde{R}_m. \quad (5.110)$$

Корені характеристичного рівняння (5.89) наближено визначаються такими розкладаннями, придатними для будь-яких  $d$ :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O(\tilde{R}_m), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \quad \lambda_{5/6} = -h + O(1),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 \left[ R_\omega^2 - 1 \pm \sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 d^2 - H^2 R_\omega^2 (1 - d^2)} \right]}{h[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2]} + O(\tilde{R}_m^3). \quad (5.111)$$

Видно, що розкладання (5.111) збігаються з розкладаннями (5.109), тільки змінилася оцінка точності обчислень.

3. Випадок великих сил внутрішнього опору:

$$h \gg 1. \quad (5.112)$$

Корені характеристичного рівняння (5.89) наближено визначаються такими розкладаннями, придатними для будь-якого  $d$ :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O\left(\frac{1}{h}\right), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{1 - \tilde{R}_m(1 \pm d)} + O(1),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 \left[ R_\omega^2 - 1 \pm \sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 d^2 - H^2 R_\omega^2 (1 - d^2)} \right]}{h[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2]} + O\left(\frac{1}{h^2}\right). \quad (5.113)$$

Оскільки розкладання (5.109), (5.111) можуть бути одержані з розкладань (5.113), то останні придатні для трьох випадків:  $\tilde{R}_m \ll 1$ ;  $h \gg 1$ ;  $\tilde{R}_m \ll 1$ ,  $h \sim 1/\tilde{R}_m$ .

5. Випадок, коли ефективна маса КВ набагато менша маси ротора і малі сили внутрішнього опору:

$$\tilde{R}_m \ll 1, \quad h \sim \sqrt{\tilde{R}_m}. \quad (5.114)$$

Розкладання коренів характеристичного рівняння (5.89):

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O\left(\sqrt{\tilde{R}_m}\right), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm \left\{ \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 \left[ R_\omega^2 - 1 - \sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 d^2 - H^2 R_\omega^2 (1 - d^2)} \right]}{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + O(\tilde{R}_m),$$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm \left\{ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 \left[ R_\omega^2 - 1 + \sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 d^2 - H^2 R_\omega^2 (1 - d^2)} \right]}{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + O(\tilde{R}_m). \quad (5.115)$$

5. Випадок, коли ефективна маса КВ набагато менша маси ротора і малі сили опору:

$$\tilde{R}_m \ll 1, \quad h, H \sim \tilde{R}_m. \quad (5.116)$$

Корені характеристичного рівняння (5.89) наближено визначаються такими розкладаннями:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} + i(1 \pm R_\omega) + \frac{i\tilde{R}_m}{2(1 \pm R_\omega)^2} + O(\tilde{R}_m^2), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

- для  $d \sim 1$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\frac{\tilde{R}_m}{R_\omega^2 - 1}} R_\omega^2 (1 - d)^{\frac{1}{2}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\frac{\tilde{R}_m}{R_\omega^2 - 1}} R_\omega^2 (1 + d)^{\frac{1}{2}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right);$$

- для  $d \sim \tilde{R}_m$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\frac{\tilde{R}_m}{R_\omega^2 - 1}} R_\omega^2 \pm \frac{i R_\omega R_\omega^3 (R_\omega^2 - 2)}{(R_\omega^2 - 1)^2} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\frac{\tilde{R}_m}{R_\omega^2 - 1}} R_\omega^2 \pm \frac{i R_\omega R_\omega^3 (R_\omega^2 - 2)}{(R_\omega^2 - 1)^2} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right);$$

- для  $d \sim 1 - \tilde{R}_m$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 (1 - d)}{R_\omega^2 - 1}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 (1 + d)}{R_\omega^2 - 1}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right). \quad (5.117)$$

З вигляду розкладань (5.117) одержуємо такі розкладання коренів, придатні для будь-яких значень  $d$ :

$$\begin{aligned}
\lambda_{1/2} &= -\frac{H}{2} + i(1 \pm R_\omega) + \frac{i\tilde{R}_m}{2(R_\omega^2 - 1)^2} + O(\tilde{R}_m^2), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \\
\lambda_{5/6} &= -\frac{h}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 (1-d)}{R_\omega^2 - 1}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right), \\
\lambda_{7/8} &= -\frac{h}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 (1+d)}{R_\omega^2 - 1}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right). \quad (5.118)
\end{aligned}$$

6. Випадок, коли ефективна маса КВ набагато менша маси ротора і ротор швидко обертається:

$$\tilde{R}_m \ll 1, \quad R_\omega \sim 1/\tilde{R}_m. \quad (5.119)$$

Корені характеристичного рівняння (5.89) наближено визначаються такими розкладаннями:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O(\tilde{R}_m), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

- для  $d > 0$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\tilde{R}_m R_\omega (1+d)}^{\frac{1}{2}} + O(1), \quad \lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\tilde{R}_m R_\omega (1-d)}^{\frac{1}{2}} + O(1);$$

- для  $d \sim 1 - \tilde{R}_m$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{2\tilde{R}_m R_\omega} + O(1),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \mp \frac{1}{2} [h^2 - 4\tilde{R}_m R_\omega^2 (1-d)]^{\frac{1}{2}} + O\left(\sqrt{\tilde{R}_m}\right). \quad (5.120)$$

З вигляду розкладань (5.120) одержуємо такі розкладання коренів, придатні для будь-яких  $d$ :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O(\tilde{R}_m), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\tilde{R}_m R_\omega (1+d)}^{\frac{1}{2}} + O\left(\sqrt{\tilde{R}_m}\right),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \mp \frac{1}{2} [h^2 - 2\tilde{R}_m R_\omega^2 (1-d^2)]^{\frac{1}{2}} + O\left(\sqrt{\tilde{R}_m}\right). \quad (5.121)$$

Зробимо аналіз одержаних розкладань коренів.

а) Розкладання коренів (5.115), одержані для випадку, коли ефективна маса КВ набагато менша маси ротора і малі сили

внутрішнього опору ( $\tilde{R}_m \ll 1$ ,  $h \sim \sqrt{\tilde{R}_m}$ ) найбільш загальні. З них можна отримати розкладання всіх інших розглянутих випадків. Вони найбільш точно характеризують закономірність у поведінці коренів при зміні різних параметрів.

б) Розкладання придатні для наближеного визначення коренів на всьому діапазоні зарезонансних швидкостей, але на деякій відстані від резонансної швидкості ( $R_\omega > 1 + \delta$ ,  $\delta > 0$ ).

в) Відповідно до розкладань основні рухи стійкі на зарезонансних швидкостях ( $R_\omega > 1$ ), у тому числі і на швидкостях, що набагато перевищують резонансну ( $R_\omega \gg 1$ ).

г) Теоретично можливо, що у системи ротор-АБП одна, чи непарна кількість критичних швидкостей, які у нульовому наближенні співпадають з резонансною частотою. У разі однієї критичної швидкості основний рух стає асимптотично стійким на закритичних швидкостях. У разі трьох – між першою і другою і над третьою, і т.д.

Знайдемо наближено критичні швидкості.

### 5.3.4. Визначення критичних швидкостей при врахуванні сил опору

Відповідно до розкладань коренів характеристичного рівняння у системи ротор-АБП одна, чи непарна кількість критичних швидкостей, які у нульовому наближенні співпадають з резонансною частотою ( $R_\omega = 1$ ). У разі однієї критичної швидкості  $R_{\omega 1}$  основний рух стає асимптотично стійким на закритичних швидкостях ( $R_\omega > R_{\omega 1}$ ). У разі трьох  $R_{\omega 1}, R_{\omega 2}, R_{\omega 3}$  – між першою і другою ( $R_{\omega 1} < R_\omega < R_{\omega 2}$ ) і над третьою ( $R_\omega > R_{\omega 3}$ ) критичними швидкостями, і т.д. Знайдемо наближено критичні швидкості.

Критичні швидкості можна визначати двома способами. У першому - виділяються критичні корені характеристичного рівняння (5.90) і будуються одночасно розкладання для цих коренів і для критичної швидкості:

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(q)} \varepsilon^q + \lambda^{(2q)} \varepsilon^{2q} + \dots, \quad R_\omega = 1 + R_\omega^{(p)} \varepsilon^p + R_\omega^{(2p)} \varepsilon^{2p} + \dots, \quad (5.122)$$

де  $q, p$  – раціональні числа, які визначають вид розкладання. На кожному кроці  $R_\omega^{(ip)}, i=1,2,\dots$  підбираються так, щоб відповідні уявні корені залишалися уявними. Вибір дуже дрібних  $q, p$  збільшить вірогідність визначення всіх критичних швидкостей, але приведе до зайвих обчислень частини нульових коефіцієнтів в розкладаннях (5.122). Метод має ту перевагу, що дозволяє за розкладаннями критичних коренів

встановлювати, як зміниться стійкість основного руху при переході через критичну швидкість (набудеться, чи втратиться).

У другому способі в характеристичне рівняння (5.90) підставляється замість  $\lambda$  шуканий уявний корінь  $i\mu$ , де  $\mu$  - дійсне число. Виділяються окремо дійсна і уявна частини характеристичного рівняння:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x) &= a_0 - a_2x + a_4x^2 - a_6x^3 + a_8x^4, \\ \operatorname{Im}(x)/x &= a_1 - a_3x + a_5x^2 - a_7x^3, \quad x = \mu^2 > 0. \end{aligned} \quad (5.123)$$

З системи рівнянь (5.123) визначаються дійсні додатні  $x$  і відповідні дійсні додатні критичні швидкості. Розкладання шукаються у вигляді

$$x = x^{(0)} + x^{(q)}\varepsilon^q + x^{(2q)}\varepsilon^{2q} + \dots, \quad R_\omega = 1 + R_\omega^{(p)}\varepsilon^p + R_\omega^{(2p)}\varepsilon^{2p} + \dots, \quad (5.124)$$

де  $q, p$  - раціональні числа, які визначають вид розкладання. На кожному кроці  $R_\omega^{(ip)}$ ,  $i=1,2,\dots$  підбираються так, щоб відповідні  $x$  залишалися дійсними від'ємними. Вибір дуже дрібних  $q, p$  збільшить вірогідність визначення всіх критичних швидкостей, але приведе до зайвих обчислень частини нульових коефіцієнтів в розкладаннях (5.124). Метод не дозволяє за розкладаннями критичних коренів встановлювати, як зміниться стійкість основного руху при переході через критичну швидкість (набудеться, чи втратиться).

Розглядаємо випадок, коли ефективна маса КВ набагато менша маси ротора ( $R_m \ll 1$ ). З розкладань (5.109) випливає, що критичними можуть бути тільки два нульових у нульовому наближенні корені. Першим способом знаходимо

$$\begin{aligned} R_{\omega 1} &= 1 + \frac{\tilde{R}_m(2h+H)}{2h^2H}(1-d^2), \\ \lambda^* &= -\frac{2(R_\omega - 1)h^2H - \tilde{R}_m(2h+H)(1-d^2)}{h^3H^3} \pm \\ &\pm i \frac{R_m(1-d^2)^{\frac{1}{2}}}{h^2H^2} [hH(2-3R_\omega) + 3\tilde{R}_m]. \end{aligned} \quad (5.125)$$

З розкладання для  $\lambda$  випливає, що основний рух стає асимптотично стійким на закритичних швидкостях ( $R_\omega > R_{\omega 1}$ ).

Другим способом уточнюємо критичну швидкість

$$\begin{aligned} R_{\omega 1} &= 1 + \frac{\tilde{R}_m(2h+H)}{2h^2H}(1-d^2) + \\ &+ \tilde{R}_m^2 \frac{(1-d^2)}{8h^4H^2} [H(7H+12h)(1-d^2) - 4d^2h(3H+5h)]. \end{aligned} \quad (5.126)$$



З розкладання (5.126) випливає, що найменше значення критична швидкість набуває при  $d=1$ , а найбільше - при  $d=0$ :

$$R_{\text{col}_{\min}} = 1, \quad R_{\text{col}_{\max}} = 1 + \tilde{R}_m \frac{(2h+H)}{2h^2H} + \frac{\tilde{R}_m^2(7H+12h)}{8h^4H}. \quad (5.127)$$

Формула (5.127) придатна і у випадку великих сил внутрішнього опору. З неї видно, що достатні сили опору істотно змінюють властивості системи. Із зменшенням сил опору одержані результати і формула (5.127) стають непридатними.

Числові обчислення показують, що формули (5.126), (5.127) дозволяють обчислювати критичну швидкість із похибкою до 10% за умови, що

$$\tilde{R}_m / 2h^2H < 1. \quad (5.128)$$

При цьому похибка швидко спадає при збільшенні сил опору.

На рис. 5.4. побудовані графіки критичної швидкості при різних параметрах системи. При побудові графіків прийнято, що

$$R_m = 0,05; \quad h = 0,75; \quad H = 0,75; \quad k = 1 - d^2, \quad d = 0,$$

якщо на графіку не вказане інше значення параметра.

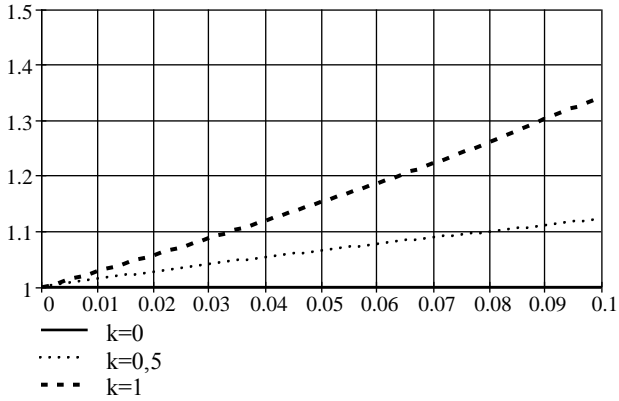
Наближені формули (5.126), (5.127) і ці графіки дозволяють зробити наступні висновки:

- 1) критична швидкість є монотонно спадаючою функцією параметра  $k = 1 - d^2$ , або монотонно зростаючою – параметра  $d$ ;
- 2) критична швидкість швидко зростає із зменшенням сил опору, причому зміна внутрішніх сил опору змінює на порядок швидше критичну швидкість, ніж зміна зовнішніх сил опору.
- 3) для настання автобалансування при будь-яких дисбалансах необхідно, щоб кутова швидкість обертання ротора була вища за максимальне значення критичної швидкості  $R_{\text{col}_{\max}}$ .

Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки щодо стійкості основних рухів. В рамках плоскої моделі ротора на ізотропних в'язко – пружних опорах, який обертається із сталою кутовою швидкістю і зрівноважується багатокуюльовим (багатомаятниковим) АБП:

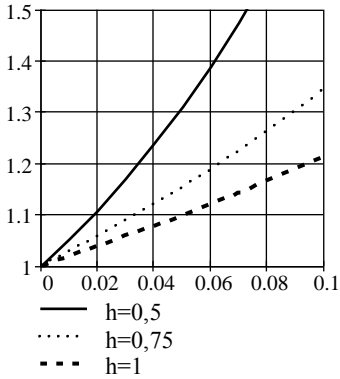
- 1) при: відсутності сил опору; однакових силах внутрішнього опору; однакових КВ – умови стійкості основних рухів не залежать від кількості КВ і збігаються з умовами стійкості у випадку двох КВ;
- 2) у перелічених випадках у системи ротор – АБП до трьох критичних швидкостей і основні рухи стійкі між першою і другою, та над третьою критичними швидкостями;
- 3) збільшення сил опору принципово змінює властивості системи, зменшуючи кількість критичних швидкостей до одної.

$$R_{\omega 1}(R_m, k)$$



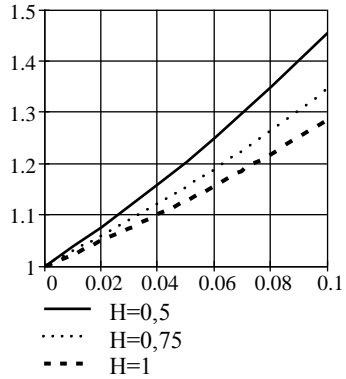
a

$$R_{\omega 1 \max}(R_m, h)$$



б

$$R_{\omega 1 \max}(R_m, H)$$



в

Рис. 5.4. Вплив зміни різних параметрів на критичну швидкість:

#### 5.4. Стійкість побічних рухів, у яких КВ обертаються синхронно з ротором і основного - у випадку великих дисбалансів

У припущенні, що КВ однакові, досліджується стійкість побічних рухів, у яких КВ обертаються синхронно з ротором, та стійкість основного руху при дисбалансі, який АБП зрівноважити не може.

##### 5.4.1. Одержання рівнянь першого наближення

Нехай ротор утримується ізотропними опорами, обертається із сталою кутовою швидкістю, і його зрівноважує АБП з однаковими КВ. Використовуємо диференціальні рівняння руху системи у вигляді (5.44), які подаємо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} R_j &= \ddot{\alpha}_j + h\dot{\alpha}_j - i\tilde{R}_m[(\dot{s} + 2iR_\omega\dot{s} - R_\omega^2s)e^{-i\alpha_j} - (\ddot{s} - 2iR_\omega\dot{s} - R_\omega^2\bar{s})e^{i\alpha_j}], \quad / j = \overline{1, n} /; \\ R_{n+1} &= \ddot{s} + 2iR_\omega\dot{s} - R_\omega^2s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s + \ddot{\psi} + 2iR_\omega\dot{\psi} - R_\omega^2\psi = 0, \\ R_{n+2} &= \bar{R}_{n+1}, \quad \psi = e_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{i\alpha_j}. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Для стаціонарних побічних рухів вводимо збурення і збурений рух

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \tilde{\alpha}_j + \beta_j = \gamma + k_j\pi + \beta_j, \quad |\beta_j| \ll 1, \quad / j = \overline{1, n} /; \\ s &= \tilde{s} + x, \quad \bar{s} = \bar{\tilde{s}} + \bar{x}, \quad |x|, |\bar{x}| \ll 1. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Лінійизуємо диференціальні рівняння руху. Розглянемо

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x}, \quad \ddot{s} = \ddot{x}; \\ \dot{\alpha}_j &= \dot{\beta}_j, \quad \ddot{\alpha}_j = \ddot{\beta}_j, \quad e^{i\alpha_j} = e^{i\gamma} \cdot e^{ik_j\pi} \cdot e^{i\beta_j} = (-1)^{k_j} e^{i\gamma} (1 + i\beta_j), \quad / j = \overline{1, n} /; \\ \psi &\approx e_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} e^{i\gamma} (1 + i\beta_j) = e_0 + e^{i\gamma} \left[ e(k) + i \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} \beta_j \right]. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Введемо нову узагальнену координату

$$\beta = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} \beta_j. \quad (5.132)$$

Тоді

$$\psi \approx e_0 + e^{i\gamma} [e(k) + i\beta], \quad \dot{\psi} \approx ie^{i\gamma}\dot{\beta}, \quad \ddot{\psi} \approx ie^{i\gamma}\ddot{\beta}, \quad (5.133)$$

і останні два рівняння системи (5.129) перетворюються до вигляду:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \ddot{x} + 2iR_\omega\dot{x} - R_\omega^2x + H(\dot{x} + iR_\omega x) + x + ie^{i\gamma}(\ddot{\beta} + 2iR_\omega\dot{\beta} - R_\omega^2\beta) = 0, \\ R_{n+2} &= \bar{R}_{n+1}. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Перетворюємо перші  $n$  рівнянь:

$$R_j \approx \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j - i\tilde{R}_m \{ [\ddot{x} + 2iR_\omega \dot{x} - R_\omega^2(x - \tilde{s})] (1 - i\beta_j)(-1)^{k_j} e^{-i\gamma} - \\ - [\ddot{\bar{x}} - 2iR_\omega \dot{\bar{x}} - R_\omega^2(\bar{x} + \tilde{s})] (1 + i\beta_j)(-1)^{k_j} e^{i\gamma} \}, \quad / j = \overline{1, n} /.$$

Остаточно для них одержуємо:

$$R_j \approx \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + (-1)^{k_j} \tilde{R}_m R_\omega^2 (\tilde{s} e^{-i\gamma} + \tilde{s} e^{i\gamma}) \beta_j - \\ - i(-1)^{k_j} \tilde{R}_m [(\ddot{x} + 2iR_\omega \dot{x} - R_\omega^2 x) e^{-i\gamma} - (\ddot{\bar{x}} - 2iR_\omega \dot{\bar{x}} - R_\omega^2 \bar{x}) e^{i\gamma}] = 0, \quad / j = \overline{1, n} / . \quad (5.135)$$

Вводимо нові змінні і параметр

$$y = i e^{-i\gamma} x, \quad \bar{y} = -i e^{i\gamma} \bar{x}, \quad 2\tilde{v} = \tilde{s} e^{-i\gamma} + \tilde{s} e^{i\gamma}. \quad (5.136)$$

Тоді лінійаризовані диференціальні рівняння приймуть вигляд:

$$L_j = \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + (-1)^{k_j} 2R_m R_\omega^2 \tilde{v} \beta_j - \\ - (-1)^{k_j} R_m (\ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + \ddot{\bar{y}} - 2iR_\omega \dot{\bar{y}} - R_\omega^2 \bar{y}) = 0, \quad / j = \overline{1, n} / ; \\ L_{n+1} = \ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + H(\dot{y} + iR_\omega y) + y - (\ddot{\beta} + 2iR_\omega \dot{\beta} - R_\omega^2 \beta) = 0, \\ L_{n+2} = \bar{L}_{n+1}. \quad (5.137)$$

Для подальшого дослідження стійкості розглянемо різні випадки.

#### 5.4.2. Випадок, коли КВ відхилені у один бік

У рухах  $k = 0, 2^n - 1$  всі КВ відповідно відхилені у важкий і легкий бік ротора:

$$k = 0 : k_j = 0; \quad k = 2^n - 1 : k_j = 1. \quad (5.138)$$

Введемо у розглядання нові змінні

$$\delta_j = \beta_n - \beta_j, \quad / j = \overline{1, n-1} / . \quad (5.139)$$

Тоді перші  $n$  рівнянь системи (5.9) перетворяться до вигляду:

$$L_n - L_j = \ddot{\delta}_j + h\dot{\delta}_j + (-1)^k 2R_m R_\omega^2 \tilde{v} \delta_j = 0, \quad / j = \overline{1, n-1} / ; \\ \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^k}{n} L_j = \ddot{\beta} + h\dot{\beta} + 2\tilde{R}_m R_\omega^2 \tilde{v} (-1)^k \beta - \\ - R_m (\ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + \ddot{\bar{y}} - 2iR_\omega \dot{\bar{y}} - R_\omega^2 \bar{y}). \quad (5.140)$$

З перших  $(n-1)$  рівнянь знаходимо таку необхідну умову асимптотичної стійкості побічного руху

$$(-1)^k \tilde{v} > 0. \quad (k = 0 : \tilde{v} > 0; \quad k = 2^n - 1 : \tilde{v} < 0). \quad (5.141)$$

Звідки випливає, що побічний рух  $k = 0$  може бути стійким при  $\tilde{v} > 0$ , а рух  $k = 2^n - 1$  - при  $\tilde{v} < 0$ .

**1.** Розглянемо випадок відсутності сил опору:  $h, H = 0$ . Як впливає з рівнянь (5.61), у цьому випадку

$$\tilde{v}(0) = \frac{R_\omega^2(e_0 + 1)}{1 - R_\omega^2}, \quad \tilde{v}(2^n - 1) = \frac{R_\omega^2(e_0 - 1)}{1 - R_\omega^2}. \quad (5.142)$$

У випадку  $k = 0$  побічний рух може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях:  $R_\omega < 1$ . У випадку  $k = 2^n - 1$  необхідна умова стійкості приймає вигляд

$$\frac{R_\omega^2(e_0 - 1)}{1 - R_\omega^2} < 0. \quad (5.143)$$

Звідки одержуємо, що рух може бути стійким при виконанні однієї з двох таких умов стійкості

$$R_\omega < 1, \quad e_0 < 1; \quad R_\omega > 1, \quad e_0 > 1. \quad (5.144)$$

Таким чином, побічний рух  $k = 2^n - 1$ ,  $e_0 < 1$  може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях, а основний рух при великих дисбалансах  $k = 2^n - 1$ ,  $e_0 > 1$  – на зарезонансних швидкостях.

**2.** Випадок наявності сил опору. Як впливає з рівнянь (5.64), у цьому випадку

$$\tilde{v}(0) = \frac{R_\omega^2(e_0 \cos \tilde{\gamma} + 1)}{1 - R_\omega^2}, \quad \tilde{v}(2^n - 1) = \frac{R_\omega^2(e_0 \cos \tilde{\gamma} - 1)}{1 - R_\omega^2}. \quad (5.145)$$

Розглядаємо можливі варіанти.

**2.1.** Випадок, коли  $e_0 < 1$ . З формул (5.70) випливає, що існують швидкості

$$R_{\omega 1/2}^* = \frac{\sqrt{4e_0^2 + H^2(1 - e_0^2)} \mp H\sqrt{1 - e_0^2}}{2e_0}, \quad 0 < R_{\omega 1}^* < 1 < R_{\omega 2}^*, \quad (5.146)$$

такі, що для руху  $k = 0$ :

$$\forall R_\omega < R_{\omega 1}, \quad \tilde{v}(0) > 0; \quad \forall R_\omega > R_{\omega 2}, \quad \tilde{v}(0) < 0. \quad (5.147)$$

Звідки випливає, що побічний рух  $k = 0$  за умови існування може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях.

Для руху  $k = 2^n - 1$ :

$$\forall R_\omega < R_{\omega 1} \quad \tilde{v}(2^n - 1) < 0, \quad \forall R_\omega > R_{\omega 2} \quad \tilde{v}(2^n - 1) > 0. \quad (5.148)$$

Звідки випливає, що цей рух за умови існування може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях.

**2.2.** Випадок, коли  $e_0 > 1$ . У цьому випадку:  
- для руху  $k = 0$

$$\forall R_\omega < 1, \tilde{v}(0) > 0; \quad \forall R_\omega > 1, \tilde{v}(0) < 0;$$

- для  $k = 2^n - 1$

$$\forall R_\omega < 1, \tilde{v}(2^n - 1) > 0; \quad \forall R_\omega > 1, \tilde{v}(2^n - 1) < 0. \quad (5.149)$$

Таким чином, побічний рух  $k = 0$  ( $e_0 > 1$ ) може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях, а основний рух  $k = 2^n - 1$  ( $e_0 > 1$ ) - на резонансних.

Для одержання додаткових умов стійкості (нестійкості) використовуємо останні два рівняння в системі (5.137) і останнє рівняння в системі (5.140). Введемо коефіцієнти

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \\ a_{33} = \lambda^2 + h\lambda \pm 2\tilde{R}_m R_\omega^2 \tilde{v}. \quad (5.150)$$

Тоді характеристичне рівняння визначається таким визначником

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & -a_{13} \\ 0 & \bar{a}_{11} & -\bar{a}_{13} \\ -R_m a_{13} & -R_m \bar{a}_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} - \tilde{R}_m (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) = 0. \quad (5.151)$$

Характеристичне рівняння у явному вигляді

$$a_6 \lambda^6 + a_5 \lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \\ a_0 = 2\tilde{R}_m R_\omega^2 \{\pm v[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2] + R_\omega^2 (R_\omega^2 - 1)\}, \\ a_1 = h[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2] + 2H\tilde{R}_m R_\omega^2 [\pm 2(R_\omega^2 + 1)v + 3R_\omega^2], \\ a_2 = (R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2 \pm 2v\tilde{R}_m R_\omega^2 [2(R_\omega^2 + 1) + H^2] + 2\tilde{R}_m R_\omega^2 (6 + R_\omega^2) + 2hH(R_\omega^2 + 1), \\ a_3 = 2R_\omega^2 [2H\tilde{R}_m (1 \pm v) + H + h] + 2(H + h) + hH^2, \\ a_4 = 2R_\omega^2 [1 - \tilde{R}_m (1 \mp v)] + 2(1 - \tilde{R}_m) + H(H + 2h), \\ a_5 = 2H(1 - \tilde{R}_m) + h, \quad a_6 = 1 - 2\tilde{R}_m. \quad (5.152)$$

Обмежимося розгляданням випадку відсутності сил опору  $h, H = 0$ .

У цьому випадку характеристичне рівняння (5.152) приймає вигляд

$$a_6 y^3 + a_4 y^2 + a_2 y + a_0 = 0, \\ a_0 = 2\tilde{R}_m R_\omega^2 (R_\omega^2 - 1) [R_\omega^2 \pm v(R_\omega^2 - 1)], \\ a_2 = (R_\omega^2 - 1)^2 \pm 4v\tilde{R}_m R_\omega^2 (R_\omega^2 + 1) + 2\tilde{R}_m R_\omega^2 (6 + R_\omega^2), \\ a_4 = 2R_\omega^2 [1 - \tilde{R}_m (1 \mp v)] + 2(1 - \tilde{R}_m), \quad a_6 = 1 - 2\tilde{R}_m. \quad (5.153)$$

Відхилення вала  $\tilde{v}$  визначається рівняннями (5.142). Тоді коефіцієнт  $a_0$  приймає вигляд:

$$a_0 = \pm 2\tilde{R}_m R_\omega^4 (1 - R_\omega^2) e_0, \quad (5.154)$$

де верхній знак відповідає руху  $k = 0$ , а нижній -  $k = 2^n - 1$ .

Для стійкості руху необхідно, щоб всі коефіцієнти в (5.153) були додатними. Звідки видно, що рух  $k = 0$  може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях і нестійкий на зарезонансних, а рух  $k = 2^n - 1$  - навпаки. З врахуванням попередніх умов стійкості, побічний рух  $k = 2^n - 1$  ( $e_0 < 1$ ) завжди нестійкий. Досліджуємо стійкість основного руху  $k = 2^n - 1$  ( $e_0 > 1$ ). Для нього решта коефіцієнтів:

$$a_2 = (R_\omega^2 - 1)^2 + \frac{2R_m R_\omega^2 [(2e_0 - 1)R_\omega^4 + (2e_0 + 3)R_\omega^2 - 6]}{R_\omega^2 - 1},$$

$$a_4 = 2(1 - R_m)(R_\omega^2 + 1) + \frac{2R_m(e_0 - 1)R_\omega^4}{R_\omega^2 - 1}, \quad a_6 = 1 - 2R_m, \quad (5.155)$$

Видно, що якщо  $e_0 > 1$ , то коефіцієнти додатні, що відповідає необхідній умові стійкості руху. Позначимо

$$x = R_\omega^2, \quad y = \lambda^2. \quad (5.156)$$

Тоді характеристичне рівняння (5.153) прийме вигляд

$$b_3 y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0,$$

$$b_0 = 2R_m e_0 (x - 1)^2 x^2, \quad b_1 = (x - 1)^3 + 2R_m x [(2e_0 - 1)x^2 + (2e_0 + 3)x - 6],$$

$$b_2 = 2(1 - R_m)(x^2 - 1) + 2R_m(e_0 - 1)x^2, \quad b_3 = (1 - 2R_m)(x - 1). \quad (5.157)$$

У некритичному випадку у полінома (5.157) всі корені від'ємні. Умова, що всі корені від'ємні [8]:

$$b_i > 0, \quad / i = \overline{0, 3}/;$$

$$\det = -b_1^2 b_2^2 + 4b_1^3 b_3 + 27b_0^2 b_3^2 - 18b_0 b_1 b_2 b_3 + 4b_0 b_2^3 < 0. \quad (5.158)$$

Аналізуємо першу групу рівнянь. Якщо  $x > 1$ , то  $b_0, b_2, b_3 > 0$ , що відповідає стійкості. Подамо  $b_1$  у вигляді

$$b_1 = (x - 1)^3 + 2R_m x [(x - 1)^2 (2e_0 - 1) + (6e_0 + 1)(x - 1) + 4(e_0 - 1)]. \quad (5.159)$$

Звідки видно, що  $\forall x > 1, e_0 > 1 \quad b_1 > 0$ . Таким чином, перша група умов виконується.

Останню умову в (5.158) можна подати у вигляді

$$\det = -16x(x - 1)^8 + 16x(x - 1)^5 [8x^3(1 + e_0) - x^2(25 - 8e_0) + 38x - 5]R_m + \dots \quad (5.160)$$

Звідки видно, що  $\det < 0$ , якщо  $R_m \ll 1$ .

Останню умову в (5.158) можна подати і в такому вигляді

$$\det = -16[1 - 2R_m(1 + e_0)]^4 x^9 + 16[1 - 2R_m(1 + e_0)]^2 [8 - 33R_m + 2R_m^2(e_0 + 17)]x^8 + \dots \quad (5.161)$$

Звідки видно, що  $\det < 0$ , якщо  $x \gg 1$  (ротор швидко обертається:  $R_\omega \gg 1$ ).

### 5.4.3. Випадок, коли КВ відхилені у різні боки

Коли КВ відхилені у різні боки  $\exists p, q \in \{1, 2, \dots, n\} : k_p \neq k_q$ .

Нехай  $m$  КВ відхилені у важкий бік ротора, а  $(n - m)$  - у легкий.

Введемо нові змінні:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \beta_{s_j}, \quad \theta = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-m} \beta_{q_j}, \quad (5.162)$$

де

$$s_j \in \{1, 2, \dots, n\} : k_{s_j} = 0, / j = \overline{1, m}/; \quad q_j \in \{1, 2, \dots, n\} : k_{q_j} = 1, / j = \overline{1, n-m}/. \quad (5.163)$$

Тоді

$$\beta = \mu + \theta. \quad (5.164)$$

Перетворюємо диференціальне рівняння руху (5.137) до вигляду:

$$\sum_{j=1}^m \frac{L_{s_j}}{n} = \ddot{\mu} + h\dot{\mu} + 2R_m R_\omega^2 \tilde{\nu} \mu - \frac{m}{n} R_m (\ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + \ddot{\bar{y}} - 2iR_\omega \dot{\bar{y}} - R_\omega^2 \bar{y}) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n-m} \frac{L_{q_j}}{n} = \ddot{\theta} + h\dot{\theta} - 2R_m R_\omega^2 \tilde{\nu} \theta - \frac{n-m}{n} R_m (\ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + \ddot{\bar{y}} - 2iR_\omega \dot{\bar{y}} - R_\omega^2 \bar{y}) = 0.$$

Розглянемо

$$e(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} = \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^m 1 - \sum_{j=1}^{n-m} 1 \right) = \frac{m - (n - m)}{n} = \frac{2m - n}{n} = 2 \frac{m}{n} - 1.$$

Тоді

$$\frac{m}{n} = \frac{1 + e(k)}{2}; \quad \frac{n - m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = \frac{1 - e(k)}{2}, \quad (5.165)$$

і перетворені диференціальні рівняння приймають вигляд:

$$S_1 = \ddot{\mu} + h\dot{\mu} + 2R_m R_\omega^2 \tilde{\nu} \mu - \frac{[1 + e(k)]}{2} R_m [\ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + \ddot{\bar{y}} - 2iR_\omega \dot{\bar{y}} - R_\omega^2 \bar{y}] = 0,$$

$$S_2 = \ddot{\theta} + h\dot{\theta} - 2R_m R_\omega^2 \tilde{\nu} \theta - \frac{[1 - e(k)]}{2} R_m [\ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + \ddot{\bar{y}} - 2iR_\omega \dot{\bar{y}} - R_\omega^2 \bar{y}] = 0,$$



$$S_3 = \ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + H(\dot{y} + iR_\omega y) + y - \\ - [(\ddot{\mu} + 2iR_\omega \dot{\mu} - R_\omega^2 \mu) + (\ddot{\theta} + 2iR_\omega \dot{\theta} - R_\omega^2 \theta)] = 0, \quad S_4 = \bar{S}_3. \quad (5.166)$$

Розглянемо різні випадки.

**1.** Випадок, коли в різні боки відхилені принаймні по 2 КВ.

Виділяємо два КВ, відхилених у важкий бік  $k_p = k_q = 0$  і два КВ – у легкий  $k_r = k_s = 0$ . Вводимо нові змінні

$$\delta_{pq} = \beta_p - \beta_q; \quad \rho_{rs} = \beta_r - \beta_k. \quad (5.167)$$

Розглянемо

$$L_p - L_q = \ddot{\delta}_{pq} + h\dot{\delta}_{pq} + 2R_m R_\omega^2 \tilde{\nu} \delta_{pq} = 0, \\ L_r - L_s = \ddot{\delta}_{rs} + h\dot{\delta}_{rs} - 2R_m R_\omega^2 \tilde{\nu} \delta_{rs} = 0. \quad (5.168)$$

Останні два диференціальні рівняння дають взаємовиключні умови стійкості

$$\tilde{\nu} > 0, \quad \tilde{\nu} < 0,$$

із чого заключаємо, що такі побічні рухи завжди нестійкі.

**2.** Випадок, коли тільки один КВ відхилений у протилежний бік по відношенню до всіх інших.

- 1) Якщо більшість КВ відхилена у важкий бік, то необхідна умова стійкості  $\tilde{\nu} > 0$  дає  $R_\omega < R_{\omega 1}$ , тобто ротор повинен обертатися з дорезонансною швидкістю.
- 2) Якщо більшість КВ відхилена у легкий бік, то необхідна умова  $\tilde{\nu} < 0$  дає:

- якщо  $e_0 < |e_k|$ , то  $R_\omega < R_{\omega 1}$ ;

- якщо  $e_0 > |e_k|$ , то  $R_\omega > 1$ ,

тобто рух може бути стійким на дорезонансних швидкостях для малих дисбалансів, або на зарезонансних - для великих. Це аналоги умов (5.21).

Для системи рівнянь (5.38) характеристичне рівняння приймає вигляд:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & -a_{13} & -a_{13} \\ 0 & \bar{a}_{11} & -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{13} \\ -\frac{[1+e(k)]}{2} \tilde{R}_m a_{13} & -\frac{[1+e(k)]}{2} \tilde{R}_m a_{13} & a_{33} & 0 \\ -\frac{[1-e(k)]}{2} \tilde{R}_m a_{13} & -\frac{[1-e(k)]}{2} \tilde{R}_m a_{13} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Або, якщо розкрити визначник

$$D(\lambda) = a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} - \frac{\tilde{R}_m}{2} (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) \{a_{33} [1-e(k)] + a_{44} [1+e(k)]\} = 0, \quad (5.169)$$

де  $a_{11}, a_{13}$  з (5.22), а

$$a_{33} = \lambda^2 + h\lambda + 2\tilde{R}_m R_\omega^2 \tilde{\nu}, \quad a_{44} = \lambda^2 + h\lambda - 2\tilde{R}_m R_\omega^2 \tilde{\nu}. \quad (5.170)$$

Оскільки

$$D(\lambda) = b_0 + \dots + b_8 \lambda^8,$$

$$b_0 = -4e_0 R_m (e_0 + e_k) R_\omega^2, \dots, b_8 = 1 - 2R_m, \quad (5.171)$$

то умова стійкості має вигляд  $e_0(e_0 + e_k) < 0$ , звідки знаходимо

$$|e_k| > e_0, \quad e_k < 0. \quad (5.172)$$

Якщо умова виконується, то рух може бути стійким на дорезонансних швидкостях. Якщо  $e_0 > |e_k|$ , то рух нестійкий.

Розглядаємо випадок  $|e_k| > e_0, \quad e_k < 0$ . Запишемо коефіцієнти характеристичного рівняння при відсутності сил опору:

$$a_0 = -4e_0(e_0 + e_k) R_m^2 R_\omega^8,$$

$$a_2 = \frac{2R_m R_\omega^4}{(R_\omega^2 - 1)^2} \{ (R_\omega^2 - 1)^3 - R_m (e_0 + e_k) [2(2e_0 + e_k) R_\omega^6 - 2(3e_k - 2e_0) R_\omega^4 + 12e_k R_\omega^2] \},$$

$$a_4 = (R_\omega^2 - 1)^2 + 2R_m R_\omega^2 (6 + R_\omega^2) - \frac{2R_m^2 R_\omega^4 (e_0 + e_k) [(2R_\omega^4 - 1)e_k + R_\omega^4 e_0]}{(R_\omega^2 - 1)^2},$$

$$a_6 = 2(R_\omega^2 + 1)(1 - R_m) - \frac{4e_k (e_0 + e_k) R_m^2 R_\omega^4}{R_\omega^2 - 1}, \quad a_8 = 1 - 2R_m. \quad (5.173)$$

Оскільки  $R_\omega < 1, e_0 + e_k < 0, e_k < 0$  то  $a_0, a_4, a_6, a_8 > 0$ , що відповідає умові стійкості. Введемо нову змінну

$$x = 1 - R_\omega^2, \quad 0 < x < 1 \quad (R_\omega^2 = 1 - x). \quad (5.174)$$

Тоді

$$a_2 = \frac{2R_m (1-x)^2}{x^2} \{ -x^3 - 2R_m (1-x) (e_0 + e_k) [(e_0 + e_k)(x^2 + x + 4) - x e_0 (7-x)] \} < 0.$$

Оскільки  $a_2 < 0$ , то і цей рух нестійкий.

Остаточо можна зробити такі висновки щодо стійкості розглянутих рухів. В рамках плоскої моделі ротора на ізотропних в'язко – пружних опорах, який обертається із сталою кутовою швидкістю і зрівноважується багатокульовим (багатомаятниковим) АБП з однаковими КВ:

- 1) стаціонарний побічний рух  $k = 0$  - у якому КВ відхилені у важкий бік ротора, може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_\omega < 1$ ), але за умови існування, а на зарезонансних швидкостях - нестійким;

- 2) решта стаціонарних побічних рухів завжди нестійка;
- 3) основний рух  $k = 2^n - 1$ ,  $e_0 > 1$ , у якому КВ відхилені у легкий бік ротора і не можуть зрівноважити великий дисбаланс - стійкий на зарезонансних швидкостях обертання ротора принаймні у випадках, коли:
- ефективна маса КВ набагато менша маси ротора ( $R_m \ll 1$ );
  - коли ротор швидко обертається ( $R_\omega \gg 1$ ).

## 5.5. Дослідження квазіперіодичних побічних рухів.

### 5.5.1. Кількість і умови існування квазіперіодичних рухів

1. Використовуємо диференціальні рівняння руху системи у вигляді (5.43). Шукаємо усталені рухи, у яких КВ обертаються відносно землі із сталою кутовою швидкістю  $\Omega$ :

$$\alpha_j = \tilde{\alpha}_j, / j = \overline{1, n/}; s = \tilde{s}, \tilde{s} = \tilde{\tilde{s}}; e_0 = 0. \quad (5.175)$$

- сталі величини. Тоді рівняння (5.51) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_j &= h_j(\Omega - R_\omega) + iR_{mj}\Omega^2(\tilde{s}e^{-i\tilde{\alpha}_j} - \tilde{\tilde{s}}e^{i\tilde{\alpha}_j}) = 0, / j = \overline{1, n/}; \\ \tilde{R}_{n+1} &= (1 - \Omega^2 + iH\Omega)s - \Omega^2 \sum_{j=1}^n e_j e^{i\tilde{\alpha}_j} = 0, \quad \tilde{R}_{n+2} = \tilde{\tilde{R}}_{n+1}. \end{aligned} \quad (5.176)$$

З рівнянь (5.51) видно, що такі рухи можуть виникати тільки, коли  $e_0 = 0$

У подальшому будемо розглядати випадок однакових КВ. Система (5.176) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_j &= h(\Omega - R_\omega) + iR_m\Omega^2(\tilde{s}e^{-i\tilde{\alpha}_j} - \tilde{\tilde{s}}e^{i\tilde{\alpha}_j}) = 0, / j = \overline{1, n/}; \\ \tilde{R}_{n+1} &= (1 - \Omega^2 + iH\Omega)\tilde{s} - \frac{\Omega^2}{n} \sum_{j=1}^n e^{i\tilde{\alpha}_j} = 0, \quad \tilde{R}_{n+2} = \tilde{\tilde{R}}_{n+1}. \end{aligned} \quad (5.177)$$

Шукаємо розв'язок системи (5.177) у вигляді

$$\tilde{\alpha}_j = \gamma, / j = \overline{1, n/}, \quad (5.178)$$

де  $\gamma$  - деякий сталий кут. Тоді система (5.177) перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{R}_j &= h(\Omega - R_\omega) + iR_m\Omega^2(\tilde{s}e^{-i\gamma} - \tilde{\tilde{s}}e^{i\gamma}) = 0, / j = \overline{1, n/}; \\ \tilde{R}_{n+1} &= (1 - \Omega^2 + iH\Omega)\tilde{s} - \Omega^2 e^{i\gamma} = 0, \quad \tilde{R}_{n+2} = \tilde{\tilde{R}}_{n+1}. \end{aligned} \quad (5.179)$$

З останніх двох рівнянь системи (5.179) знаходимо

$$\tilde{s} = \frac{\Omega^2 e^{i\gamma}}{1 - \Omega^2 + iH\Omega}, \quad \tilde{s} = \frac{\Omega^2 e^{-i\gamma}}{1 - \Omega^2 - iH\Omega}. \quad (5.180)$$

Тоді з перших  $n$  рівнянь системи (5.179) знаходимо

$$\tilde{R}_j = h(\Omega - R_\omega) + iR_m \Omega^2 \left( \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 + iH\Omega} - \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 - iH\Omega} \right) = 0, \quad / j = \overline{1, n} / ,$$

або

$$\tilde{R}_j = h(\Omega - R_\omega) + \frac{2R_m \Omega^5 H}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} = 0, \quad / j = \overline{1, n} / .$$

Звідси отримуємо таке рівняння для визначення  $\Omega$  :

$$P(\Omega) = 2R_{mH} \Omega^5 - (R_\omega - \Omega)[(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2] = 0, \quad R_{mH} = R_m H / h. \quad (5.181)$$

Кожному дійсному  $\Omega$  - розв'язку рівняння (5.181) буде відповідати однопараметрична сім'я усталених рухів вигляду (5.178), (5.180), що залежить від параметра  $\gamma$ . Зробимо попередній аналіз коренів полінома (5.181). Оскільки

$$\forall \Omega \leq 0 \quad P(\Omega) < 0, \quad \forall \Omega \geq R_\omega \quad P(\Omega) > 0, \quad P(1) = 2R_{mH} - H^2(R_\omega - 1),$$

то: всі дійсні корені рівняння (5.181) лежать у відкритому інтервалі  $(0, R_\omega)$ ; якщо  $P(1) > 0$ , то принаймні один корінь  $\Omega < 1$ . З умови, що  $P(1) > 0$  знаходимо:

$$R_\omega < R_\omega^*, \quad R_\omega^* = 1 + \frac{2R_{mH}}{H^2}. \quad (5.182)$$

При виконанні умови (5.182) принаймні один корінь полінома (5.181) буде меншим за 1.

Розглянемо граничний випадок  $R_\omega \sim R_\omega^*$ . Вводимо нову змінну і параметр

$$\Omega = 1 + w, \quad R_\omega = R_\omega^* + \omega. \quad (5.183)$$

Тоді, поліном (5.181) перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} P(w) = & (1 + 2R_{mH})w^5 - \left[ \frac{2R_{mH}}{H^2}(1 - 5H^2) + \omega - 4 \right] w^4 - \\ & - \left[ \frac{4R_{mH}}{H^2}(2 - 5H^2) + 4\omega - 4 - H^2 \right] w^3 - \\ & - \left[ \frac{2R_{mH}}{H^2}(4 - 9H^2) + \omega(4 + H^2) - 2H^2 \right] w^2 + \\ & + (6R_{mH} + H^2 - 2H\omega)w - \omega H^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.184)$$

Із наближенням  $R_\omega$  до  $R_\omega^*$  параметр  $w$  проходить через 0, а корінь  $\Omega$  проходить через 1. Цей випадок не є особливим, бо корінь не стає кратним чи комплексним.

Знайдемо наближено корені полінома (5.181) у граничних випадках. Для цього розкладемо корені за степенями малих параметрів і залишимо тільки дійсні корені.

1. У випадку малих швидкостей обертання ротора  $R_\omega \ll 1$  у рівняння (5.181) один дійсний корінь

$$\Omega_1 \approx R_\omega (1 - 2R_{mH} R_\omega^4). \quad (5.185)$$

2. У випадку, коли ротор швидко обертається  $R_\omega \gg 1$  у рівняння (5.181) єдиний дійсний корінь, близький до  $R_\omega$ :

$$\Omega_1 = \frac{R_\omega}{1 + 2R_{mH}}. \quad (5.186)$$

3. Розглядаємо випадок, коли  $H, R_{mH} \sim \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$  (малі сили зовнішнього опору  $H \sim \varepsilon$ ; маса КВ набагато менша маси ротора і малі сили опору  $R_m, h, H \sim \varepsilon$  і інші) при різних кутових швидкостях обертання ротора.

3.1. У випадку, коли кутова швидкість скінчена, у рівняння (5.181) три дійсних кореня

$$\Omega_{1/2} \approx 1 \mp \sqrt{\frac{R_{mH}}{2(R_\omega - 1)}}, \quad \Omega_3 \approx R_\omega - \frac{2R_{mH} R_\omega^5}{(R_\omega^2 - 1)^2}. \quad (5.187)$$

Видно, що дійсні  $\Omega_{1/2}$  існують тільки на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_\omega > 1$ ), і розкладання придатні на деякій віддалі від резонансної частоти.

3.2. У випадку, коли  $(R_\omega - 1) \sim \sqrt[3]{\varepsilon}$  - ротор обертається з навколо резонансної швидкістю, у рівняння (5.181) один чи три дійсних кореня, еквівалентних 1:

$$\Omega_i \approx 1 + \sqrt[3]{H \tilde{\Omega}_i}, \quad /i=1,2,3/, \\ R_\omega = 1 + \sqrt[3]{H} \omega, \quad f(\tilde{\Omega}) = \tilde{\Omega}^3 - \omega \tilde{\Omega}^2 + R_{mH} / 2H = 0, \quad (5.188)$$

де  $\omega$  - параметр, а  $\tilde{\Omega}$  - корені наведеного кубічного рівняння. Введемо коефіцієнти

$$c_0 = R_m / 2H, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -\omega, \quad c_3 = 1. \quad (5.189)$$

Тоді у кубічного рівняння в (5.188) існуватимуть три дійсних кореня за виконанням такої умови [234]

$$\Delta = -c_1^2 c_2^2 + 4c_1^3 c_3 + 27c_0^2 c_3^2 - 18c_0 c_1 c_2 c_3 + 4c_0 c_2^3 < 0, \quad (5.190)$$

яка після підстановки рівностей (5.187) приймає вигляд

$$\Delta = -\frac{R_{mH}}{4H^2}(8H\omega^3 - 27R_{mH}) < 0.$$

Ця умова буде виконуватися, якщо

$$\omega > \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{R_{mH}}{H}}, \quad \left( R_{\omega} > 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{R_{mH}} \right).$$

Введемо у розглядання критичну швидкість

$$R_{\omega 1}^* \approx 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{R_{mH}}. \quad (5.191)$$

Тоді, якщо  $R_{\omega} < R_{\omega 1}^*$ , то у системи один квазіперіодичний рух, а якщо  $R_{\omega} > R_{\omega 1}^*$ , то - три.

Якщо  $R_{\omega} = R_{\omega 1}^*$   $\left( \omega = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{R_{mH}}{H}} \right)$ , то корені кубічного рівняння (5.188)

визначаються рівностями

$$\tilde{\Omega}_1 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{R_{mH}}{H}}, \quad \tilde{\Omega}_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{R_{mH}}{H}},$$

і з врахуванням (5.188) частоти прецесії наближено визначаються формулами

$$\Omega_1 \approx 1 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{R_{mH}}, \quad \Omega_{2,3} \approx 1 + \sqrt[3]{R_{mH}}. \quad (5.192)$$

З вигляду кубічного рівняння в (5.188) заключаємо, що у нього для будь-яких  $\omega \sim 1$  завжди існує від'ємний корінь і з зростанням  $\omega$  з'являються ще два додатних кореня. Тому у системи при будь-яких  $\omega \sim 1$  завжди існує один квазіперіодичний рух з частотою прецесії, меншою 1, і з зростанням кутової швидкості з'являються ще два квазіперіодичні рухи з частотою прецесії більшою за 1.

Зробимо в (5.188) заміну параметра  $\omega$  і змінної  $\tilde{\Omega}$ :

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{R_{mH}}{H}}(1+w), \quad \tilde{\Omega} = z\sqrt[3]{\frac{R_{mH}}{H}}. \quad (5.193)$$

Тоді кубічне рівняння у (5.188) з точністю до сталого множника прийме вигляд

$$\tilde{f}(z) = 2z^3 - 3z^2(1+w) + 1 = 0. \quad (5.194)$$

Його корені мають такі розкладання по  $w$ :

$$z_1 \approx -\frac{1}{2}(1-w/3), \quad z_{2/3} = 1 \mp \sqrt{w} + \frac{2}{3}w.$$

Остаточно, у параметричному вигляді, наближено знаходимо наступні

частоти прецесії

$$\Omega_1 \approx 1 - \frac{1}{2} \sqrt[3]{R_{mH}} (1 - w/3), \quad \Omega_{2/3} \approx 1 + \sqrt[3]{R_{mH}} (1 \mp \sqrt{w} + 2w/3),$$

$$R_\omega = 1 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{R_{mH}} (1 + w), \quad (5.195)$$

де  $w$  - параметр. Для того, щоб одержати розв'язок у явному вигляді, треба у (5.195) підставити

$$w = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{R_\omega - 1}{R_{mH}}} - 1. \quad (5.196)$$

3.3. У випадку, коли ротор швидко обертається  $R_\omega \sim 1/\varepsilon$  у рівняння (5.181) один чи три дійсних кореня:

$$\Omega_{1/2} \approx 1 \mp \sqrt{\frac{2R_{mH} - H^2 R_\omega}{4R_\omega}}, \quad \Omega_3 \approx R_\omega (1 - 2R_{mH}), \quad (5.197)$$

причому  $\Omega_{1,2}$  дійсні за виконанням такої умови

$$R_\omega < \tilde{R}_{\omega 2}^*, \quad \tilde{R}_{\omega 2}^* = \frac{2R_{mH}}{H^2}. \quad (5.198)$$

Видно, що  $\tilde{R}_{\omega 2}^* \gg 1$ , і  $\tilde{R}_{\omega 2}^* \approx R_\omega^*$ . Для уточнення критичної швидкості  $\tilde{R}_{\omega 2}^*$ , при перевищенні якої перестають існувати два перших нестационарних рухи  $\Omega_{1,2}$  будемо її і відповідний критичний корінь шукати у вигляді

$$R_\omega = \frac{2R_{mH}}{H^2} + r_0 + r_1 H + \dots, \quad \Omega = 1 + \omega_{3/2} H^{3/2} + \omega_2 H^2 + \dots, \quad (5.199)$$

де  $r_i, \omega_j$  - коефіцієнти розкладань. У результаті одержуємо кутову швидкість і відповідні їй критичні корені рівняння (5.181) у такому вигляді

$$R_\omega \approx 1 + \frac{2R_{mH}}{H^2} + H\sigma, \quad \Omega_{1/2} \approx 1 + H^2 \left[ \frac{3}{8} \pm \sqrt{9 - \frac{8H\sigma}{R_{mH}}} \right], \quad (5.200)$$

де  $\sigma$  - параметр, еквівалентний 1, чи 0. У критичному випадку величина під коренем в (5.200) дорівнює 0. З цієї умови знаходимо  $\sigma^* = 9R_{mH}/8H$ . Підставляючи це в (5.200), отримуємо уточнену критичну швидкість і критичні корені:

$$R_{\omega 2}^* \approx 1 + \frac{2R_{mH}}{H^2} + \frac{9R_{mH}}{8}, \quad \Omega_{1/2}^* \approx 1 + \frac{3}{8} H^2. \quad (5.201)$$

Видно, що критичні корені дещо більші за 1 і зникають на швидкості

$R_{\omega 2}^*$ , дещо більший за  $R_{\omega}^*$ .

Дві критичні швидкості  $R_{\omega 1}^*$ ,  $R_{\omega 2}^*$  існують за умови, що  $R_{\omega 1}^* < R_{\omega 2}^*$ . Використовуючи (5.191) і (5.201), знаходимо умову, при якій це можливо:

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} < \frac{R_{mH}}{H^3} \left( \frac{3\sqrt{3}}{8} < \frac{R_m}{H^2 h} \right). \quad (5.202)$$

Враховуючи співвідношення між параметрами, заключаємо, що ця умова виконується практично при всіх важливих для практики випадках. Тому у системи в певному інтервалі кутових швидкостей обертання ротора теоретично можуть існувати три квазіперіодичні рухи.

4. У випадку, коли  $R_{mH} \sim 1/\varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$  (малі сили внутрішнього опору  $h \sim \varepsilon$ ) у рівняння (5.181) єдиний дійсний корінь і він менший за 1:

$$\Omega_1 \approx \sqrt[5]{\frac{R_{\omega}}{2R_{mH}}}. \quad (5.203)$$

5. У випадку, коли  $R_{mH} \sim \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$  (маса КВ набагато менша маси ротора  $R_m \sim \varepsilon$ , а сили опору скінчені), у рівняння (5.181) єдиний дійсний корінь, близький до  $R_{\omega}$ :

$$\Omega_1 \approx R_{\omega} - \frac{2R_{mH}R_{\omega}^5}{(R_{\omega}^2 - 1)^2 + H^2R_{\omega}^2}. \quad (5.204)$$

Остаточо можна зробити такі висновки.

1) У важливих з точки зору практики випадках, зокрема, коли  $H$ ,  $R_{mH} \sim \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$  (малі сил зовнішнього опору  $H \sim \varepsilon$ ; маса КВ набагато менша маси ротора і малі сили опору  $R_m, h, H \sim \varepsilon$  і інших):

- на дорезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_{\omega} < 1$ ) і зарезонансних швидкостях, менших за  $R_{\omega 1}^*$  ( $1 < R_{\omega} < R_{\omega 1}^*$ ), існує єдиний нестационарний рух  $\Omega_1$ , такий, що  $0 < \Omega_1 < 1$ ;
- на зарезонансних швидкостях, більших за  $R_{\omega 1}^*$ , але менших за  $R_{\omega}^*$  ( $R_{\omega 1}^* < R_{\omega} < R_{\omega}^*$ ), існують три нестационарних рухи  $\Omega_{1,2,3}$ , такі, що  $0 < \Omega_1 < 1 < \Omega_2 < \Omega_3 < R_{\omega}$ ;
- на зарезонансних швидкостях, більших за  $R_{\omega}^*$ , але менших за  $R_{\omega 2}^*$  ( $R_{\omega}^* < R_{\omega} < R_{\omega 2}^*$ ), існують три нестационарних рухи  $\Omega_{1,2,3}$ , такі, що  $1 < \Omega_1 < \Omega_2 \ll \Omega_3 < R_{\omega}$ ;



- на зарезонансних швидкостях, більших за  $R_{\omega 2}^*$  ( $R_{\omega} > R_{\omega 2}^*$ ), існує єдиний нестационарний рух  $\Omega_3$ , такий, що  $1 \ll \Omega_3 < R_{\omega}$ .

2) При будь-яких параметрах системи існує тільки один нестационарний рух  $\Omega_1$ , такий, що на певних швидкостях  $0 < \Omega_1 < 1$ , причому:

- на швидкостях, менших за  $R_{\omega}^*$  ( $R_{\omega} < R_{\omega}^*$ ),  $0 < \Omega_1 < 1$ ;

- на швидкостях, більших за  $R_{\omega}^*$  ( $R_{\omega} > R_{\omega}^*$ ),  $\Omega_1 > 1$ .

Зауважимо, що нестационарні рухи пронумеровані у порядку зростання частоти прецесії  $\Omega$ .

### 5.5.2. Стійкість квазіперіодичних рухів

Досліджуємо стійкість квазіперіодичних рухів. Введемо збурений рух

$$\alpha_j = \gamma + \beta_j, \quad |\beta_j| \ll 1, \quad s = \tilde{s} + x, \quad \bar{s} = \tilde{\bar{s}} + \bar{x}, \quad |x| \ll 1. \quad (5.205)$$

Перетворюємо диференціальні рівняння руху (5.171). Розглянемо

$$e^{i\alpha_j} = e^{i\gamma} \cdot e^{i\beta_j} \approx e^{i\gamma} (1 + i\beta_j), \quad e^{i\alpha_j} \approx e^{-i\gamma} (1 - i\beta_j). \quad (5.206)$$

Перетворюємо перші  $n$  рівнянь в (5.174):

$$R_j \approx [\ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + h(\Omega - R_{\omega})] - iR_m \{ [\ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2(x + \tilde{s})] e^{-i\gamma} (1 - i\beta_j) - \\ - [\ddot{\bar{x}} - 2i\Omega\dot{\bar{x}} - \Omega^2(\bar{x} + \tilde{\bar{s}})] e^{i\gamma} (1 + i\beta_j) \} = 0.$$

Залишаємо величини першого порядку малості:

$$R_j \approx \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + R_m \Omega^2 (\tilde{s} e^{-i\gamma} + \tilde{\bar{s}} e^{i\gamma}) \beta_j -$$

$$- iR_m [(\ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x) e^{-i\gamma} - (\ddot{\bar{x}} - 2i\Omega\dot{\bar{x}} - \Omega^2 \bar{x}) e^{i\gamma}] = 0, \quad / j = \overline{1, n} /. \quad (5.207)$$

Перетворюємо останні два рівняння в (5.174):

$$R_{n+1} \approx \ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x + H(\dot{x} + 2i\Omega x) + x - \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} (2\Omega\dot{\beta}_j + \Omega^2 - i\ddot{\beta}_j)(1 + i\beta_j) e^{i\gamma} -$$

$$- \Omega^2 \tilde{s} + iH\Omega \tilde{s} + s = 0, \quad R_{n+2} = \bar{R}_{n+1}.$$

Або остаточно:

$$R_{n+1} \approx \ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x + H(\dot{x} + 2i\Omega x) + x -$$

$$- \frac{e^{i\gamma}}{n} \sum_{j=1}^n i(\ddot{\beta}_j + 2i\Omega\dot{\beta}_j - \Omega^2 \beta_j) = 0, \quad R_{n+2} = \bar{R}_{n+1}. \quad (5.208)$$

Розглянемо

$$\tilde{s}e^{-i\gamma} + \tilde{s}e^{i\gamma} = \frac{\Omega^2}{1-\Omega^2 + iH\Omega} + \frac{\Omega^2}{1-\Omega^2 - iH\Omega} = \frac{2\Omega^2(1-\Omega^2)}{(1-\Omega^2)^2 + H^2\Omega^2}.$$

Тоді система (5.207) перетворюється до вигляду:

$$R_j \approx \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + \frac{2R_m\Omega^4(1-\Omega^2)\beta_j}{(1-\Omega^2)^2 + H^2\Omega^2} - iR_m[(\ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2x)e^{-i\gamma} - (\ddot{\bar{x}} - 2i\Omega\dot{\bar{x}} - \Omega^2\bar{x})e^{i\gamma}] = 0, \quad / j = \overline{1, n} / . \quad (5.209)$$

Зробимо попередньо оцінку стійкості, використовуючи систему рівнянь (5.209). Розглянемо

$$R_n - R_j = \ddot{\delta}_{nj} + h\dot{\delta}_{nj} + \frac{2R_m\Omega^4(1-\Omega^2)\delta_{nj}}{(1-\Omega^2)^2 + H^2\Omega^2} = 0, \quad \delta_{nj} = \beta_n - \beta_j, \quad / j = \overline{1, n-1} / . \quad (5.210)$$

З системи рівнянь (5.210) видно, що для  $\Omega > 1$  квазіперіодичний рух нестійкий, а для  $\Omega < 1$  - може бути асимптотично стійким:

$$\Omega < 1, \quad (5.211)$$

- необхідна умова асимптотичної стійкості. З врахуванням розв'язків рівняння (5.181) і умов їх існування заключаємо, що розглядувані рухи можуть існувати і бути стійкими тільки на швидкостях, менших за  $R_\omega^*$  з (5.182).

Введемо нову змінну

$$\beta = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \beta_j . \quad (5.212)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{n} &= \ddot{\beta} + h\dot{\beta} + \frac{2R_m\Omega^4(1-\Omega^2)}{(1-\Omega^2)^2 + H^2\Omega^2} \beta - \\ &- iR_m[(\ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2x)e^{-i\gamma} - (\ddot{\bar{x}} - 2i\Omega\dot{\bar{x}} - \Omega^2\bar{x})e^{i\gamma}] = 0, \\ R_{n+1} &= \ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2x + H(\dot{x} + 2i\Omega x) + x + ie^{i\gamma}(\ddot{\beta} + 2i\Omega\dot{\beta} - \Omega^2\beta) = 0, \\ R_{n+2} &= \overline{R}_{n+1}. \end{aligned} \quad (5.213)$$

Введемо у розглядання коефіцієнти

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\lambda + i\Omega)^2 + H(\lambda + i\Omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + i\Omega)^2, \\ a_{33} &= \lambda^2 + h\lambda + R_m v, \quad v = \frac{2R_m\Omega^4(1-\Omega^2)}{(1-\Omega^2)^2 + H^2\Omega^2}. \end{aligned} \quad (5.214)$$

Тоді характеристичне рівняння трьох рівнянь (5.213) (останніх з незадіяних) задається визначником:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & ie^{i\gamma}a_{13} \\ 0 & \bar{a}_{11} & -ie^{-i\gamma}\bar{a}_{13} \\ -iR_m e^{-i\gamma}a_{13} & iR_m e^{i\gamma}\bar{a}_{13} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\bar{a}_{11}a_{33} - R_m(\bar{a}_{11}a_{13}^2 + a_{11}\bar{a}_{13}^2) = 0. \quad (5.215)$$

Можна перевірити, що  $D(0)=0$  і характеристичне рівняння у явному вигляді має вигляд:

$$D(\lambda) = (b_5\lambda^5 + b_4\lambda^4 + b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)\lambda,$$

$$b_0 = h[(\Omega^2 - 1)^2 + H^2\Omega^2] + 2HR_m[(1 + \Omega^2)v + 3\Omega^4],$$

$$b_1 = (1 - \Omega^2)^2 + H^2\Omega^2 + 2hH(1 + \Omega^2) + R_m\{[2(1 + \Omega^2) + H^2]v + 2\Omega^2(6 + \Omega^2)\},$$

$$b_2 = 2(h + H)(1 + \Omega^2) + 2R_m(2\Omega^2 + v)H + hH^2,$$

$$b_3 = 2(1 + \Omega^2)(1 - R_m) + vR_m + H(H + 2h),$$

$$b_4 = 2H(1 - R_m) + h, \quad b_5 = 1 - 2R_m. \quad (5.216)$$

Наявність одного нульового кореня пов'язана із тим, що вивчається стійкість однопараметричної сім'ї усталених рухів, а не з тим, що цей випадок критичний [230]. Відповідно до критерію Рауса-Гурвіца умови асимптотичної стійкості (від'ємності дійсних частин ненульових коренів характеристичного рівняння (5.216)) мають вигляд:

$$b_i > 0, /i=0,5/; \quad \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \quad (5.217)$$

де

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_4 & b_2 \\ b_5 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_4 & b_2 & b_0 \\ b_5 & b_3 & b_1 \\ 0 & b_4 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} b_4 & b_2 & b_0 & 0 \\ b_5 & b_3 & b_1 & 0 \\ 0 & b_4 & b_2 & b_0 \\ 0 & b_5 & b_3 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Якщо врахувати, що  $0 < \Omega < 1$ ,  $v > 0$ , то перша група умов в (5.217) виконується. Перевіримо другу групу умов. Знаходимо

$$\Delta_2 = [2(\Omega^2 + 1) + v]R_m h + 2H\{[(1 - 2R_m)^2 + 2R_m^2]\Omega^2 + (1 - R_m)^2 + R_m^2(1 - v) + h^2\} +$$

$$+ 2hH^2(2 - R_m) + 2(1 - R_m)H^3. \quad (5.218)$$

Оскільки  $v > 0$  і  $\Omega^2 < 1$ , то  $\Delta_2 > 0$  - умова виконується.

Розглядаємо випадки побічних рухів, у яких  $\Omega < 1$ . Розкладаємо визначники (5.217) за степенями малого параметру у граничних випадках.

1. У випадку малих швидкостей обертання ротора  $R_\omega \ll 1$  для руху  $\Omega_1 < 1$  (використали розкладання  $\Omega_1$  з (5.185)):

$$\begin{aligned} \Delta_3 / 2 \approx & (1 - R_m)hH^5 + [(2 - R_m)h^2 + 2(1 - R_m)]H^4 + [h^2 + 2R_m(1 - R_m) + 3]hH^3 + \\ & + [(2 + 3R_m)h^2 + 2R_m^2]H^2 + [h^2 + (1 - 2R_m)^2 + R_m + 2R_m^2]hH + h^2R_m > 0; \\ \Delta_4 / 4 \approx & (1 - R_m)h^2H^6 + [(2 - R_m)h^2 + 2(1 - R_m)]hH^5 + \\ & + \{h^4 + [3R_m + 2(1 - R_m^2)]h^2 + 1 - R_m\}H^4 + \\ & + R_mh(4h^2 + 4 - R_m)H^3 + R_m^2(5h^2 + 1)H^2 + 2R_m^3hH > 0. \end{aligned} \quad (5.219)$$

Отже, рух асимптотично стійкий.

2. Випадки, коли маса КВ набагато менша маси ротора і малі сили опору  $h, H, R_m \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1$ .

2.1. Розглядаємо скінчену швидкість обертання ротора, на віддалі від резонансу. Для руху  $\Omega_1 < 1, R_\omega > 1$  (рух  $\Omega_1$  з (5.187)):

$$\Delta_3 = 16H(H + h) + o(\varepsilon^2), \quad \Delta_4 = 64h\sqrt{2R_mhH(R_\omega - 1)} + o(\varepsilon^{5/2}). \quad (5.220)$$

Оскільки  $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ , то рух асимптотично стійкий.

Для руху  $\Omega_1 < 1, R_\omega < 1$  (рух  $\Omega_3$  з (5.187)):

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 2H[h(R_\omega^4 + 6R_\omega^2 + 1) + 8HR_\omega^2] + o(\varepsilon^2), \\ \Delta_4 &= 16(R_\omega^2 - 1)^2 H^2 R_\omega^2 + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.221)$$

Оскільки  $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ , то цей рух асимптотично стійкий.

2.2. Розглядаємо ротор, що швидко обертається. Для руху  $\Omega_1 < 1$  (рух  $\Omega_1$  з (5.197)):

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 16H^2 + 2hH[4 + (2 - \sqrt{z})^2] + o(\varepsilon^2), \quad \Delta_4 = 4hH\sqrt{z}(4 - \sqrt{z})^2 + o(\varepsilon^2), \\ z &= h^2 R_\omega (\tilde{R}_{\omega 2}^* - R_\omega). \end{aligned} \quad (5.222)$$

Оскільки для будь якого  $z > 0$  ( $R_\omega < \tilde{R}_{\omega 2}^*$ ) визначники  $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ , то рух  $\Omega_1 < 1$  стійкий на великих швидкостях, за умови існування.

3. При малих силах зовнішнього опору  $H \ll 1$ , для руху  $\Omega_1 < 1, R_\omega > 1$  (рух  $\Omega_1$  з (5.187)):

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 2(2R_\omega - 1)R_m h^2 + o(1), \\ \Delta_4 &= 8R_m h^2 R_\omega \sqrt{2R_m h(R_\omega - 1)/H} + o(1/\sqrt{H}). \end{aligned} \quad (5.223)$$

Тут  $o(\delta)$  позначає величину, що набагато менша за  $\delta$ . Оскільки  $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ , то рух асимптотично стійкий.

Для руху  $\Omega_1 < 1, R_\omega < 1$  (рух  $\Omega_3$  з (5.187)):

$$\Delta_3 = 2R_m h^2 + o(1), \quad \Delta_4 = \frac{16R_m^2 h^2 R_\omega^2}{1 - R_\omega^2} + o(1). \quad (5.224)$$

Оскільки  $\Delta_3 > 0$ ,  $\Delta_4 > 0$ , то цей рух асимптотично стійкий.

4. При малих силах внутрішнього опору  $h \ll 1$  для руху  $\Omega_1 < 1$  (рух  $\Omega_1$  з (5.203)):

$$\Delta_3 \approx \Delta_4 = 4H^2[R_m^2 + (1 - R_m)H^2] + o(1). \quad (5.225)$$

Отже  $\Delta_3 > 0$ ,  $\Delta_4 > 0$ , і рух асимптотично стійкий.

З розглянутих випадків можна зробити висновок, що нестационарний побічний рух  $\Omega_1$ , у якому  $\Omega_1 < 1$ , асимптотично стійкий у області власного існування, тобто на швидкостях

$$R_\omega \in (0, R_\omega^*), \quad R_\omega^* = 1 + 2R_m / hH, \quad (5.226)$$

а решта нестационарних рухів нестійка.

### 5.5.3. Вигляд квазіперіодичних рухів

Розглянуті побічні рухи є періодичними. Коли з'являється дисбаланс ( $e_0 > 0$ ), вони породжують квазіперіодичні рухи. Знайдемо наближено ці рухи, вважаючи, що дисбаланс малий ( $e_0 > 0$ ).

Використовуємо диференціальні рівняння руху (5.47). У нульовому наближенні

$$\varphi_j = \Omega\tau + \gamma, \quad / j = \overline{1, n} /. \quad (5.227)$$

Підстановка кутів  $\varphi_j$  у останні два рівняння системи (5.47) перетворює їх до вигляду

$$M_{n+1} = \ddot{z} + H\dot{z} + z = \Omega^2 e^{i(\Omega\tau + \gamma)} + e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega\tau}, \quad M_{n+2} = \overline{M}_{n+1}. \quad (5.228)$$

Частинними розв'язками цих двох рівнянь є

$$z = \frac{\Omega^2 e^{i(\Omega\tau + \gamma)}}{1 - \Omega^2 + 2iH\Omega} + \frac{e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega\tau}}{1 - R_\omega^2 + 2iHR_\omega}, \quad \bar{z}. \quad (5.229)$$

Рівняння (5.227) і (5.229) є наближеним виразом деякого квазіперіодичного руху. У цього руху можуть бути і інші складові, але оскільки в системі є сили опору, то всі інші складові цього руху будуть з часом згасати і залишаться тільки ці складові.

Для практичного використання достатньо наближеного розв'язку (5.227), (5.229). Для одержання наступних наближень можна скористатися методом малого параметра, чи іншим асимптотичним методом [238-242, 245].

Для невеликих дисбалансів умови існування і стійкості квазіперіодичних рухів співпадають з такими для побічних рухів у випадку відсутності дисбалансу.

Перетворимо закон квазіперіодичного руху ротора (5.229) до зручного для досліджень вигляду. Подамо це рівняння у вигляді

$$z = \frac{R_m \Omega^2}{\sqrt{D(\Omega)}} i e^{i(\Omega\tau + \gamma)} \left[ \frac{1 - \Omega^2}{\sqrt{D(\Omega)}} - \frac{iH\Omega}{\sqrt{D(\Omega)}} \right] - \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{D(R_\omega)}} e^{iR_\omega \tau} \left[ \frac{R_\omega^2 - 1}{\sqrt{D(R_\omega)}} + \frac{iHR_\omega}{\sqrt{D(R_\omega)}} \right],$$

$$D(\omega) = (\omega^2 - 1)^2 + H^2 \omega^2. \quad (5.230)$$

Введемо у розглядання кути

$$\gamma_1 : \cos \gamma_1 = \frac{1 - \Omega^2}{\sqrt{D(\Omega)}}, \quad \sin \gamma_1 = \frac{H\Omega}{\sqrt{D(\Omega)}},$$

$$\gamma_2 : \cos \gamma_2 = \frac{R_\omega^2 - 1}{\sqrt{D(R_\omega)}}, \quad \sin \gamma_2 = \frac{HR_\omega}{\sqrt{D(R_\omega)}}. \quad (5.231)$$

Враховуючи, що

$$\cos \gamma_1 - i \sin \gamma_1 = e^{-i\gamma_1}, \quad \cos \gamma_2 + i \sin \gamma_2 = e^{i\gamma_2}, \quad i = e^{i\pi/2}, \quad -1 = e^{i\pi},$$

перетворюємо рівняння (5.230) до вигляду

$$z = \frac{R_m \Omega^2}{\sqrt{D(\Omega)}} i e^{i(\Omega\tau + \gamma - \gamma_1 + \pi/2)} + \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{D(R_\omega)}} e^{i(R_\omega \tau + \gamma_2 + \pi)}. \quad (5.232)$$

Оберемо новий момент часу  $\tau_0$  за початковий і введемо новий час  $T$

$$\tau = \tau_0 + T, \quad T = \tau - \tau_0. \quad (5.233)$$

Початковий момент часу обираємо з такої умови

$$\Omega\tau_0 + \gamma - \gamma_1 + \pi/2 = R_\omega\tau_0 + \gamma_2 + \pi = \Gamma,$$

з якої знаходимо

$$\tau_0 = \frac{\gamma - \gamma_1 - \gamma_2 - \pi/2}{R_\omega - \Omega}, \quad \Gamma = \frac{(\gamma - \gamma_1 + \pi/2)R_\omega - (\gamma_2 + \pi)\Omega}{R_\omega - \Omega}. \quad (5.234)$$

Оскільки  $\Omega < R_\omega$ , то  $\tau_0, \Gamma$  завжди існують. Тоді рівняння (5.232) прийме вигляд

$$z = \left[ \frac{R_m \Omega^2}{\sqrt{D(\Omega)}} e^{i\Omega T} + \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{D(R_\omega)}} e^{iR_\omega T} \right] e^{i\Gamma}. \quad (5.235)$$

Перейдемо до осей, повернутих на кут  $\Gamma$ . Вводимо нову комплексну координату

$$Z = z e^{-i\Gamma}. \quad (5.236)$$

Тоді закон руху повздовжньої осі ротора прийме вигляд

$$Z = A_{\Pi} e^{i\Omega T} + A_{\Pi} e^{iR_{\omega} T}, \quad A_{\Pi} = \frac{R_m \Omega^2}{\sqrt{D(\Omega)}}, \quad A_{\Pi} = \frac{R_m R_{\omega}^2 e_0}{\sqrt{D(R_{\omega})}}. \quad (5.237)$$

Подамо цей закон руху ще і у такому вигляді:

$$Z = (A_{\Pi} + A_{\Pi} e^{i(R_{\omega} - \Omega)T}) e^{i\Omega T}. \quad (5.238)$$

Відповідно до результатів досліджень стійкості цих рухів стійким є тільки той рух, у якому  $0 < \Omega < 1$ , причому на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_{\omega} > 1$ ). Вважаємо, що квазіперіодичний рух задовольняє цю умову.

Аналіз одержаних рівнянь (5.237), чи (5.238) показує наступне:

- 1) рух повздожньої осі ротора є сумою двох рухів
  - повільної прецесії з кутовою швидкістю  $\Omega$  і амплітудою  $A_{\Pi}$ ,
  - швидкої нутації з кутовою швидкістю  $R_{\omega}$  і амплітудою  $A_{\Pi}$ ,
 і крива, по якій рухається повздожня вісь, є гіпоциклоїдою;
- 2) якщо частота нутації у ціле число  $k = R_{\omega} / \Omega$ ,  $k \in N$  перевищує частоту прецесії, то рух періодичний з періодом

$$T^* = 2\pi / \Omega, \quad (5.239)$$

гіпоциклоїда замкнена і має  $(k-1)$  пелюсток (рис. 5.5, а);

- 3) якщо частота нутації у раціональне число  $k = n/m = R_{\omega} / \Omega$ ,  $n, m \in N$  ( $n$  не ділиться на  $m$ ) перевищує частоту прецесії, то рух періодичний з періодом

$$T^* = 2\pi m / \Omega, \quad (5.240)$$

гіпоциклоїда замкнена, має  $(n-m)$  пелюсток які замикаються, охопивши центр  $m$  разів (рис. 5.5, б);

- 4) якщо частота нутації у ірраціональне число разів  $k = R_{\omega} / \Omega$ ,  $r \in N/Q$  перевищує частоту прецесії, то рух квазіперіодичний і гіпоциклоїда розімкнена (рис. 5.5, в);

5) при однаковому співвідношенні між частотою прецесії і нутації ( $k = \text{const}$ ) при малих дисбалансах гіпоциклоїди укорочені (рис. 5.6, а), при зростанні дисбалансу стають нормальними (рис. 5.6, б), а потім – подовженими (рис. 5.6, в);

6) при фіксованому дисбалансі ( $e_0 = \text{const}$ ) із зростанням кутової швидкості обертання ротора гіпоциклоїди із скорочених прямують до нормальних, із нормальних – до подовжених, а із подовжених стають ще більш подовженими (рис. 5.7), при цьому гіпоциклоїди:

- скорочені, якщо

$$A_{\Pi} \Omega / A_{\Pi} R_{\omega} > 1, \quad (5.241)$$

- нормальні, якщо

$$A_{\Pi}\Omega/A_{\Pi}R_{\omega} = 1, \quad (5.242)$$

- подовжені, якщо

$$A_{\Pi}\Omega/A_{\Pi}R_{\omega} < 1; \quad (5.243)$$

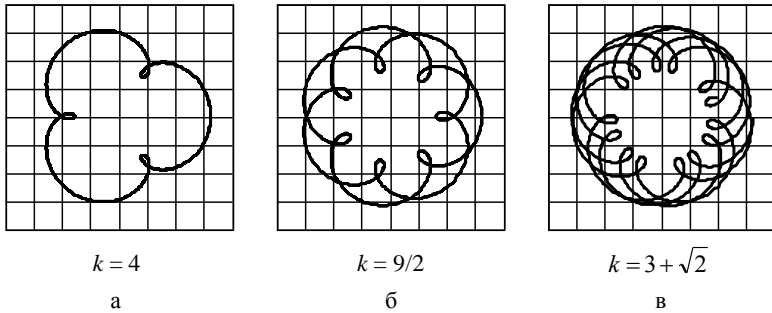


Рис. 5.5. Гіпоциклоїди – залежність від відношення частоти нутації до частоти прецесії  $k = R_{\omega} / \Omega$

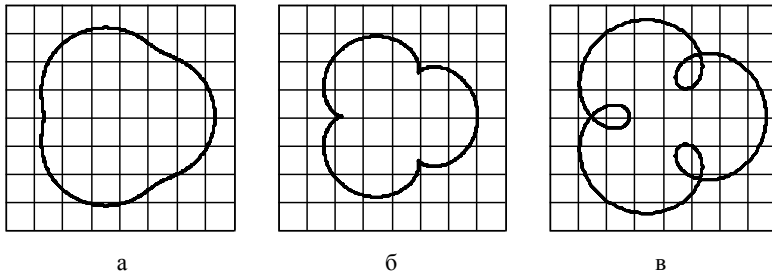


Рис. 5.6. Гіпоциклоїди – залежність від величини дисбалансу ( $k = 4$ ):

а – дисбаланс малий  $e_0 \sim 0$ ; б – дисбаланс середній  $0 < e_0 < 1$ ;

в – дисбаланс великий  $e_0 \sim 1$ .

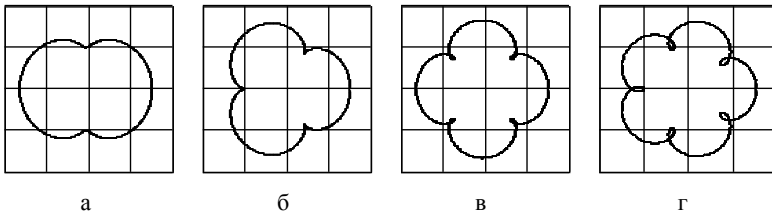


Рис. 5.7. Гіпоциклоїди – залежність від відношення частоти прецесії до частоти нутації: а – укорочена, б – нормальна, в, г – подовжені



7) при зростанні кутової швидкості обертання ротора  $R_\omega$  амплітуди прецесії і нутації швидко прямують до своїх верхніх граничних значень

$$A_\Pi \rightarrow R_m/H, \quad A_n \rightarrow R_m e_0, \quad (5.244)$$

і тому абсолютний розмах сумарних коливань майже незмінний і приблизно складає

$$A = \sqrt{A_\Pi^2 + A_n^2} \approx R_m \sqrt{1/H^2 + e_0^2}; \quad (5.245)$$

Те, що з зростанням кутової швидкості обертання ротора  $A_n \rightarrow R_m e_0$  і це верхня границя, видно безпосередньо з (5.237). Доведемо, що  $R_m/H$  - верхня границя для  $A_\Pi$ .

Якщо  $R_\omega \rightarrow R_\omega^*$ , то  $\Omega \rightarrow 1$  і  $A_\Pi \xrightarrow{\Omega \rightarrow 1} R_m/H$ . Перевіримо, чи є у  $A_\Pi$  максимум в інтервалі (0,1). Розглянемо

$$\frac{dA_\Pi}{d\Omega} = \frac{R_m \Omega [2(1-\Omega^2) + H^2 \Omega^2]}{[(1-\Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2]^{3/2}} = 0. \quad (5.246)$$

З (5.237) видно, що у  $A_\Pi$  у точці  $\Omega=0$  - мінімум. Екстремум можливий у точках, у яких  $2(1-\Omega^2) + H^2 \Omega^2 = 0$ . Додатній розв'язок цього рівняння  $\Omega = \sqrt{2}/\sqrt{2-H^2} > 1$ . Оскільки корінь більше 1, то у  $A_\Pi$  немає екстремуму в інтервалі (0,1). Тому це монотонно зростаюча функція  $\Omega$ , яка обмежена величиною  $R_m/H$ .

Основні висновки з теорії квазіперіодичних рухів наступні:

- при невеликих дисбалансах на зарезонансних швидкостях обертання ротора, менших за  $R_\omega^*$  з (5.182), існує і стійка однопараметрична сім'я нестационарних усталених рухів (квазіперіодичних чи періодичних), у яких кулі (маятники) притиснуті одна до одної й обертаються навколо повздовжньої осі ротора в напрямку обертання ротора з частотою  $\Omega$ , меншою за резонансну ( $\Omega < 1$ ), а повздовжня вісь ротора рухається по гіпоциклоїді, що утворена сумою двох рухів: "повільної" прецесії з частотою  $\Omega$ ; "швидкої" нутації з частотою, рівною швидкості обертання ротора  $R_\omega$ ;
- збільшенням зовнішніх і внутрішніх сил опору можна зробити зарезонансну область існування цих рухів як завгодно малою;
- для працездатності АБП додатково необхідно, щоб квазіперіодичні рухи були нестійкі, або не існували, що забезпечується експлуатацією АБП на швидкостях, більших за  $R_\omega^*$  з (5.182).

## 5.6. Експериментальне дослідження динаміки кульового АБП

### 5.6.1. Дослідження на універсальному стенді

Для експериментального дослідження динаміки кульових АБП були виготовлені два АБП однакової маси і балансувальної ємності (рис. 5.8). В одному АБП кулі підтримуються на рівні бігової доріжки горизонтальною площадкою (рис. 5.8, а). В другому АБП дно конічне, у зв'язку з чим кулі виходять на бігову доріжку при розгоні ротора (рис. 5.8, б). Зверху корпуса АБП можуть закриватися кришкою з органічного скла, що дозволяє заповнювати їх мастилом і слідкувати при цьому за рухом куль.

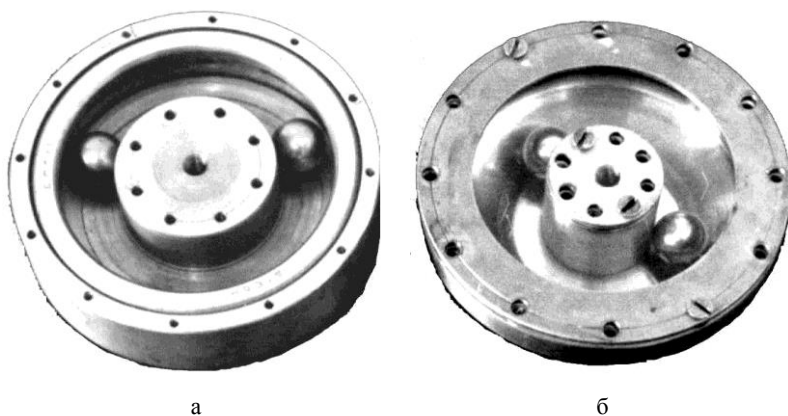


Рис. 5.8. Дослідні моделі кульових АБП:  
а - плоске дно; б - конічне дно

Опис стенда і методики проведення на ньому експериментів наведені у розділі 4. Параметри стенда з кульовим АБП наступні:

$$M=4,45 \text{ кг}, m=0,045 \text{ кг}, \omega_0=3 \text{ об/с}, \quad (5.247)$$

де  $M$  – сумарна маса обертових частин двигуна, центрифуги й АБП;  $m$  – маса однієї кулі;  $\omega_0$  – частота власних коливань центрифуги.

Після виконання етапів 1 і 2 була встановлена прийнятна точність виготовлення АБП.

Основні результати досліджень параметрів роботи АБП при зрівноваженні різних дисбалансів наступні.

1) Автобалансування відбувається на швидкостях, що перевищують резонансну частоту – частоту власних коливань центрифуги.

2) Автобалансування відбувається при парній (рис. 5.9, а-г, з-к, м) і непарній (рис. 5.9, д-ж, л) кількості куль.

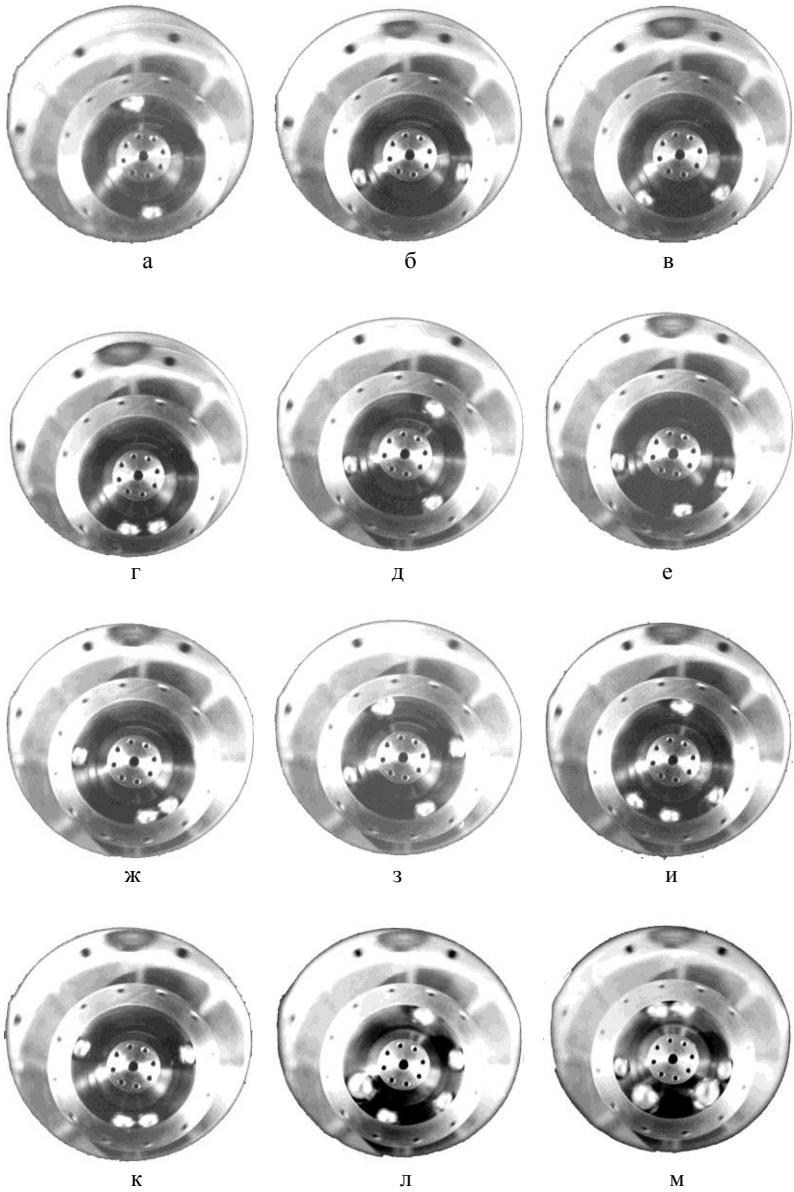


Рис. 5.9. Фотографії зрівноваження ротора кульовими АБП

3) Автобалансування відбувається при однакових (рис. 5.9, а-к) і різних (рис. 5.9, л, м) кулях (різні кулі можна розглядати як багаторядне розташування куль).

4) Автобалансування відбувається при будь-яких дисбалансах: майже рівних нулю (рис. 5.9, а, д, з); малих (рис. 5.9, б); середніх (рис. 5.9, в, е, ж, и, к-м); великих, більших за ємність АБП (рис. 5.9, д) – кулі максимально відхиляються у легкий бік ротора.

5) При дисбалансах, менших за ємність АБП, залишковий дисбаланс майже лінійно залежить від дисбалансу, який зрівноважується, причому:

- при в'язкому мастилі не перевищує  $1/5$  від початкового;
- при рідкому мастилі, чи очищенні бігової доріжки від мастила не перевищує  $1/6$  від початкового.

Нижче наводяться деякі результати більш докладно.

При відсутності дисбалансу, або малому дисбалансі ( $S \leq 0,1$  – безрозмірний дисбаланс, причому  $S=1$  – балансувальна ємність АБП) кулі займають нейтральне положення рис. 5.9, а, д, з. Лазерний промінь без куль в АБП описує коло малого діаметру, а при їх наявності практично вказує у своє статичне положення – рис. 5.10, а.

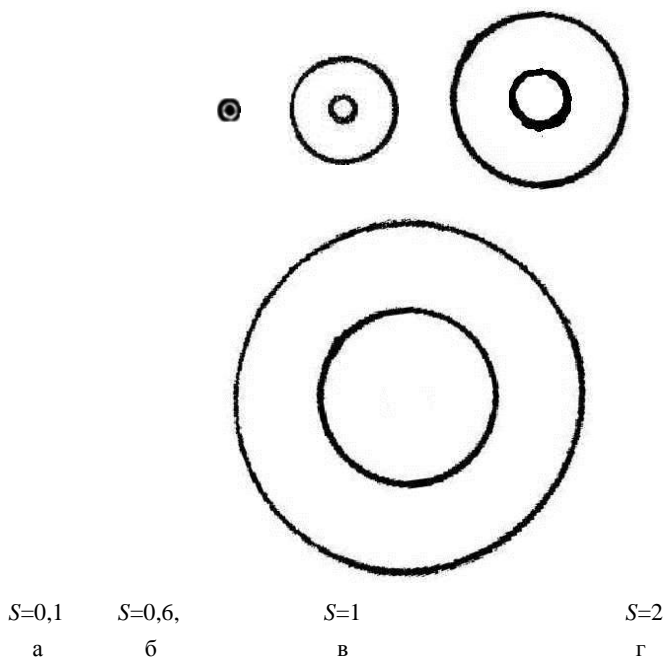


Рис. 5.10. Фотографії слідів лазерного променя на екрані при зрівноваженні АБП різних дисбалансів

При середньому дисбалансі ( $S=0,3\div 0,7$ ) кулі відхиляються у легкий бік ротора рівно на стільки, щоб його зрівноважити рис. 5.9, б, в, е, ж, и-м. Лазерний промінь без КВ в АБП описує коло середнього діаметру, а при наявності КВ – коло, діаметр якого у  $5\div 6$  разів менший – рис. 5.10, б, причому 5 відповідає в'язкому мастилу, а 6 – рідкому.

При максимальному дисбалансі, який може зрівноважити АБП ( $S=1$ ) КВ максимально відхиляється у легкий бік ротора - рис. 5.9, г. Лазерний промінь без КВ в АБП описує коло великого діаметру, а при наявності КВ – коло, діаметр якого у  $5\div 6$  разів менший – рис. 5.10, в, причому 5 відповідає в'язкому мастилу, а 6 – рідкому.

При дисбалансі, який майже удвічі перевищує балансувальну ємність АБП, кулі максимально відхилені у легкий бік ротора, чим максимально зменшують дисбаланс. Лазерний промінь без куль в АБП описує велике коло, а з кулями – коло майже удвічі меншого діаметра (рис. 5.10, г).

На рис. 5.11 наведена оцінка зверху і знизу залишкового дисбалансу при зрівноваженні ротора кульовими АБП. Аналітично залишковий дисбаланс зверху обмежує

$$S_{\text{зал}}^{(\max)} = \begin{cases} S/(5\div 6), & S \leq 1; \\ (S-1) + 1/(5\div 6), & S > 1, \end{cases} \quad (5.248)$$

де  $S$  – поточний безрозмірний дисбаланс і 5 відповідає в'язкому, а 6 – рідкому мастилу.

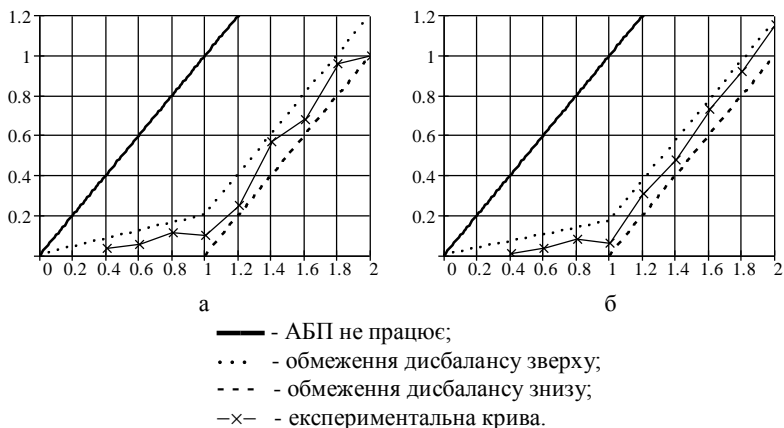


Рис. 5.11. Оцінка ефективності зрівноваження ротора кульовими АБП:  
а – в'язке, б – рідке мастило

При наявності сил в'язкого опору (бігова доріжка змазана шаром в'язкого мастила або кулі поміщенні в олію):

- кулі швидко утягують в обертання разом з ротором і балансування настає за мінімальний проміжок часу, навіть під час розгону ротора;
- чутливість куль до зміни дисбалансу тим менша, чим більша в'язкість олії або змащення бігової доріжки;
- при вибігу ротора кулі залишаються в положенні, у якому зрівноважують ротор аж до резонансної швидкості обертання ротора, а часто і до менших швидкостей і навіть до повної зупинки ротора;
- чим більша в'язкість олії або змащення бігової доріжки, тим довше кулі залишаються в положенні, у якому зрівноважують ротор, що пояснюється в'язкістю змащення або олії, а не можливістю балансування ротора на дорезонансних швидкостях;

При очищенні бігової доріжки від змащення поведінка автобалансирів принципово змінюється. Найбільш повно досліджена поведінка автобалансирів із двома кулями. У залежності від типу АБП спостерігаються три або чотири різних режими руху.

**1.** У першому режимі настає автобалансування ротора. Час перехідних процесів значний - від 7 до 45 секунд.

Спостерігаються два принципово різних режими розгону куль.

У першому режимі розгону кулі притиснуті одна до одної і при обертанні відстають від ротора. Під час розгону їхнє видиме зображення подвоюється, потроюється, учетверяється і т.д. – по мірі відставання від ротора, а потім у оберненому порядку – по мірі здоганання ротора. Коли кулі доганяють ротор, то починають дуже швидко розходитися і зближатися з зіткненнями. Нарешті відбувається сильний удар кулі об кулю, після чого кулі починають коливатися біля положень, у яких зрівноважують ротор з частотою, близькою до резонансної. Ці коливання через 2-7 секунд загасають. Промінь лазера, поки кулі притиснуті одна до одної, коливається з частотою, близькою до резонансної і при цьому він періодично проходить через своє статичне положення, то наближаючись до нього, то віддаляючись. Часто видний рисунок, що нагадує гіпоциклоїди - декілька пелюсток, з'єднаних у статичному положенні променя. При коливанні куль навколо положень, у яких вони зрівноважують ротор, промінь лазера описує коло, яке змінює свій діаметр. У результаті декількох коливань з навколо резонансною частотою коло вироджується в точку.

В другому режимі розгону кулі знаходяться навпроти одна одної. Їхнє видиме зображення подвоюється, потроюється і т.д. – по мірі відставання від ротора, а потім все відбувається у оберненому порядку – по мірі доганяння кулями ротора. Коли кулі доганяють ротор, одна з куль починає швидко рухатися назустріч іншій кулі, відбувається різкий

удар, кулі починають коливатися біля положень, у яких зрівноважують ротор. З часом коливання згасають. Під час розгону куль промінь лазера описує коло змінного діаметра. Іноді лазер під час розгону куль вказує в точку свого статичного положення, і тільки після зіткнення куль з'являється пульсуюче коло, але його діаметр значно менший, ніж у попередньому описаному режимі розгону. Другий режим розгону куль значно спокійніший за перший.

Режим автобалансування стійкий до зовнішніх збурень. На великих швидкостях обертання ротора на положення куль мало впливають дії зовнішніх сил на ротор або гальмування ротора.

2. В другому режимі дві кулі притиснуті одна до одної і в обертанні відстають від ротора. Лазерний промінь описує гіпоциклоїди, зображені на рис. 5.12. Режим стійкий до зовнішніх впливів на ротор і до зміни швидкості обертання ротора. При вибігу ротора кратність зображень куль зменшується, аж до подвоєння. При подальшому зменшенні швидкості обертання ротора видно дійсний рух куль щодо ротора – кулі щільно притиснуті одна до одної і котяться по біговій доріжці у бік, протилежний напрямкові обертання ротора. При падінні швидкості обертання ротора до резонансної частоти спостерігається картина, аналогічна першому режимові. Окремо другий режим досліджується нижче.

3. У третьому режимі кулі розташовані одна напроти одної. Вони починають доганяти ротор, тому їхнє зображення подвоюється, потроюється і т.д. Однак у деякий момент відбувається різке коливання ротора, кулі значно втрачають швидкість, і далі усе повторюється (знову починають доганяти ротор і т.д.). Режим стійкий до впливів на ротор і до зміни швидкості обертання ротора. При вибігу ротора на деякій швидкості обертання ротора третій режим переходить у другий. При цьому одна з куль починає котитися у бік другої кулі, б'є по ній, і потім дві кулі, притиснувшись одна до одної, котяться щодо ротора у бік, протилежний напрямкові обертання ротора.

4. У четвертому режимі кулі починають доганяти ротор, але вдаряються об бігову доріжку, відскакують, падають на дно АБП і т.д. Режим спостерігається рідко, частіше під час вибігу ротора. Режим схильний переходити в другий режим руху ротора. В автобалансири, у якого нижня площадка горизонтальна (підтримує кулі), цей режим не спостерігається.

Окремо на вибігу ротора досліджувалися критичні швидкості. Встановлена залежність величин і кількості критичних швидкостей від дисбалансу. Результати випробувань наступні.

1) Якщо дисбаланс малий (кулі розташовані майже одна напроти одної), то на вибігу ротора можна спостерігати до трьох критичних швидкостей, що відповідає теоретичним дослідженням, проведеним у

п. 5.3. Найвища - у  $1,5 \div 1,7$  разів перевищує резонансну частоту, найнижча практично дорівнює резонансній частоті, а середня перевищує резонансну частоту у  $1,1$  раза. Якщо на рух куль зовні не впливати, то з трьох критичних швидкостей спостерігаються тільки дві - найвища і найнижча. При падінні швидкості обертання ротора до найвищої критичної автобалансування зникає. При цьому одна з куль раптово втрачає швидкість і починає рухатися у напрямку іншої кулі, б'є по ній і потім дві кулі притискаються одна до одної і починається другий режим руху. При падінні кутової швидкості обертання ротора до найнижчої критичної кулі припиняють рух відносно ротора, максимально відхиляються у його легкий бік і з падінням швидкості обертання ротора з  $1$  до  $0,9$  від резонансної частоти перекочуються разом у важкий бік ротора. З цього боку кулі залишаються до повної зупинки ротора. Якщо на швидкості обертання ротора, яка дещо менша за другу критичну і більша за першу ( $1 \div 1,1$  від резонансної частоти), гнучкою рейкою примусово розігнати кулі, то знову настає автобалансування. Саме так виявлялося існування середньої критичної швидкості. З падінням швидкості обертання ротора до найнижчої критичної кулі раптово зближаються, торкаються одна одної з легкого боку ротора і з подальшим падінням швидкості перекочуються разом у важкий бік ротора, тобто рухаються, як це було описано вище.

2) Якщо дисбаланс середній (кулі відхилені на  $45^0$ ), то спостерігається одна критична швидкість, яка в  $1,2 \sim 1,4$  разів перевищує резонансну частоту. При падінні швидкості обертання ротора до критичної одна з куль починає рух проти обертання ротора у бік другої кулі, б'є по ній і потім дві кулі, притиснувшись одна до одної, перекочуються по біговій доріжці в напрямку, зворотному напрямкові обертання ротора (відстають від нього), тобто відбувається другий режим руху. При падінні кутової швидкості обертання ротора до резонансної кулі припиняють рух відносно ротора, максимально відхиляються у його легкий бік і з падінням швидкості обертання ротора з  $1$  до  $0,9$  від резонансної частоти перекочуються разом у важкий бік ротора. З цього боку кулі залишаються до повної зупинки ротора.

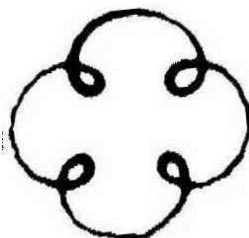
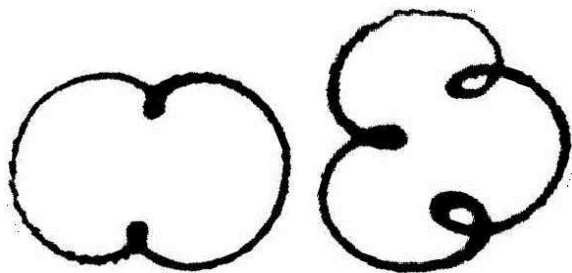
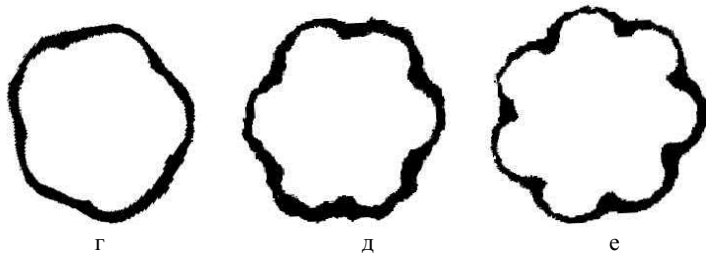
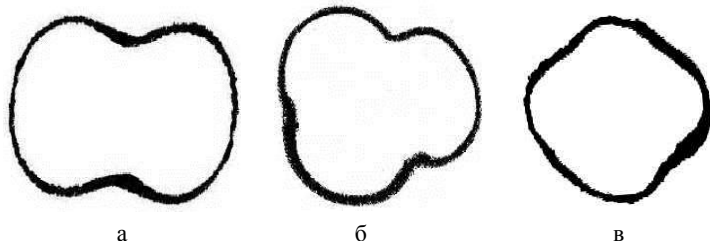
3) Якщо дисбаланс великий (кулі притиснуті одна до одної і знаходяться з легкого боку ротора), то спостерігаються три критичні швидкості, такі ж за величиною, як і у випадку малих дисбалансів. При переході кутовою швидкістю обертання ротора найвищої критичної швидкості кулі разом починають коливатися навколо положення, у якому найбільше відхилені у легкий бік ротора. При переході через другу критичну швидкість коливання припиняються і кулі знову максимально відхиляються у легкий бік ротора. При переході найнижчої критичної



швидкості кулі перекочуються у важкий бік ротора, де і залишаються до повної його зупинки.

Окремо досліджувалися квазіперіодичні рухи. Результати досліджень наступні.

1) Квазіперіодичні рухи виникають при парній і непарній кількості куль, як однакових, так і різних, за умов, що:



ж

з

и

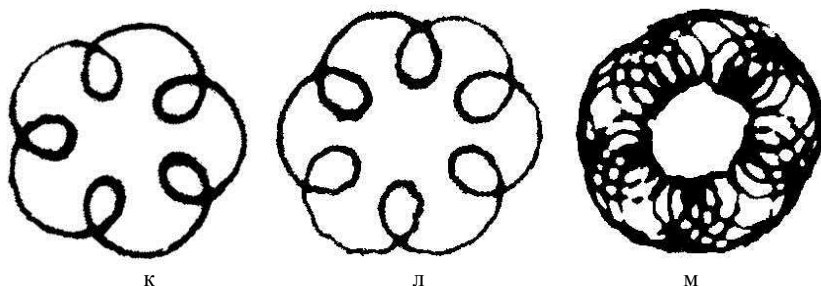


Рис. 5.12. Фотографії слідів лазерного променя на екрані – гіпоциклоїди:  
 а-е – дисбаланс  $S=0,3$ ;  
 ж-м – дисбаланс  $S=0,7$ .

- дисбаланс не перевищує балансувальну ємність АБП;
- швидкість обертання ротора не перевищує деякої граничної величини, яка швидко зменшується із збільшенням сил в'язкого опору, які перешкоджають руху куль.

2) В цих рухах кулі притиснуті одна до одної, і обертаючись навколо осі обертання, відстають від ротора, а повздовжня вісь останнього рухається по гіпоциклоїді, яка утворена прямою прецесією з частотою обертання куль і прямою нутацією з частотою обертання ротора. Частота прецесії завжди менше резонансної частоти обертання ротора.

3) Якщо частота нутації у ціле число  $k$  перевищує частоту прецесії, то гіпоциклоїда нерухома і має  $(k-1)$  пелюсток (рис. 5.12, а-л).

4) Якщо частота нутації не в ціле число разів перевищує частоту прецесії, то гіпоциклоїда рухома і обертається на екрані за чи проти ходу стрілки годинника, що сприймається суб'єктивно (рис. 5.12, м).

5) При однаковому співвідношенні між частотою прецесії і нутації ( $k=\text{const}$ ) при малих дисбалансах гіпоциклоїди ближче до укорочених, чи нормальних (рис. 5.12, а-е), при зростанні дисбалансу – до подовжених і подовжених (рис. 5.12, ж-м);

6) При фіксованому дисбалансі ( $e_0 = \text{const}$ ) із зростанням кутової швидкості обертання ротора гіпоциклоїди із скорочених прямують до нормальних, із нормальних – до подовжених, а із подовжених стають ще більш подовженими (рис. 5.12, а-л).

7) Амплітуди прецесії і нутації майже не залежать від швидкості обертання ротора (рис. 5.12).

8) Збільшення внутрішніх сил опору зменшує граничну швидкість, при перевищенні якої зникає квазіперіодичний рух, а збільшення маси куль цю швидкість збільшує.

9) Квазіперіодичні рухи стійкі до збурень, таких, як: раптова зміна швидкості обертання ротора, удар по корпусу машини, нахил ротора, раптова зміна дисбалансу (закидання усередину ротора мас, що створюють дисбаланс).

10) Якщо кулям не допомагати розганятися, то встановлюється квазіперіодичний рух. Якщо допомогти кулям розігнатися (пружна рейка опирається в дно АБП і забезпечує розгін куль), то відбувається автобалансування.

Слід зауважити, що при певних параметрах системи одночасна стійкість двох рухів – основного і квазіперіодичного, може знаходитися у протиріччі з математичними викладками. Але фізично вона пояснюється тим, що у квазіперіодичних рухах кулі не сильно тиснуть на доріжку, бо обертаються з невеликою швидкістю. У основному русі тиск значно посилюється, бо кулі обертаються синхронно з ротором. Це підсилює внутрішні сили опору, зокрема сухе тертя, що сприяє автобалансуванню.

### **5.6.2. Дослідження на стенді ротора з нерухомою точкою**

Стенд і методика проведення на ньому досліджень описані в п.4.6 розділу 4. Результати випробувань наступні.

1) При скінчених силах в'язкого опору, утворених поміщенням куль у мастило, чи нанесенням на доріжку шару солідолу:

а) автобалансування відбувається при будь-якій кількості однакових і різних куль (у випробуваннях  $n = 2, 3, \dots, 9$ , кулі масою 10, 20, 45 гр.);

б) з падінням кутової швидкості обертання ротора автобалансування зберігається до швидкості  $\omega = 3,2 \pm 0,3$  об/с, що близька до частоти власних коливань рами стенду;

в) якщо кулі поміщені у мастило, то автобалансування втрачається на більш високих кутових швидкостях  $\omega \approx 3,5$  об/с;

г) якщо бігова доріжка змазана шаром солідолу, то автобалансування іноді втрачається на швидкостях навіть менших за резонансну частоту  $\omega \approx 2,9$  об/с, що пояснюється тим, що солідол забезпечує прилипання куль до бігової доріжки;

д) відхилення вала від осі обертання при непрацюючому АБП, викликане дисбалансом, який за величиною дорівнює 0,5 від балансувальної ємності АБП, зменшується при роботі АБП у 4÷5 разів, причому 5 відповідає поміщенню куль у мастило, а 4 - нанесенню на доріжку солідолу;

е) при дисбалансах, які може зрівноважити АБП, кутова швидкість обертання ротора, при якій втрачається автобалансування, із зростанням дисбалансу дещо збільшується (на 0,3 об/с);

ж) при дисбалансах, які не може зрівноважити АБП, кутова швидкість обертання ротора, при якій втрачається автобалансування, не

залежить від величини дисбалансу і дещо вище частоти власних коливань рами (приблизно  $\omega \approx 3,5$  об/с).

2) При малих силах в'язкого опору, утворених змащуванням бігової доріжки в'язким мастилом:

а) якщо ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора, то при будь-якій кількості однакових і різних куль, на швидкостях, що значно перевищують резонансну ( $\omega > 6 \div 8$  об/с), відбувається квазіперіодичний рух, у якому кулі обертаються відносно землі із кутовою швидкістю, що близька до резонансної ( $\omega \approx 3,3$  об/с), а повздожня вісь ротора коливається навколо горизонтальної осі, що тримає раму, із цією швидкістю;

б) якщо кулі примусово розганяються (на доріжку встановлена переборка), то автобалансування настає при будь-якій кількості однакових і різних куль;

в) якщо ємності АБП не вистачає для зрівноваження ротора, то автобалансування відбувається при будь-якій кількості однакових і різних куль, на швидкостях, що значно перевищують резонансну ( $\omega > 30 \div 35$  об/с), причому розгін ротора до настання автобалансування неспокійний і нагадує квазіперіодичний рух;

г) при будь-яких дисбалансах автобалансування втрачається на швидкостях, що значно перевищують резонансну частоту ( $\omega \approx 6 \div 8$  об/с), при цьому кулі припиняють обертання разом з ротором і опиняються у нижній частині бігової доріжки;

д) відхилення вала від осі обертання при непрацюючому АБП, викликане дисбалансом, який за величиною дорівнює 0,5 від балансувальної ємності АБП, зменшується при роботі АБП у 6 разів.

3) Майже при відсутності сил в'язкого опору, що діють на кулі, що забезпечується очищенням бігової доріжки від мастила:

а) автобалансування не настає, бо кулі весь час знаходяться у нижній частині бігової доріжки і не можуть розігнатися;

б) якщо примусово розігнати кулі (встановити на доріжку переборку), то АБП поводить як і при малих силах в'язкого опору (див. п.2).

## Висновки розділу 5

1. Теоретично досліджена плоска модель ротора на ізотропних в'язко-пружних опорах, в якій ротор обертається із сталою кутовою швидкістю і зрівноважується багатоккульовим (багатомаятниковим) АБП. Найбільш істотні результати, які уперше встановлені, наступні.

а) Ефективним є метод дослідження стійкості сімей основних рухів відносно узагальнених координат, які характеризують дисбаланс системи. Із застосуванням методу вперше встановлено:

- при: відсутності сил опору; однакових силах внутрішнього опору; однакових КВ – умови стійкості основних рухів не залежать від кількості КВ і збігаються з умовами стійкості у випадку двох КВ;
- у перелічених випадках у системи ротор – АБП до трьох критичних швидкостей і основні рухи стійкі між першою і другою, та над третьою критичними швидкостями;
- збільшення сил опору принципово змінює властивості системи, зменшуючи кількість критичних швидкостей до однієї, причому ця швидкість дещо більша за резонансну частоту.

б) У випадку однакових КВ умови стійкості побічних рухів, у яких кулі синхронно обертаються з ротором і основного руху у випадку великих дисбалансів наступні:

- стаціонарний побічний рух  $k = 0$  - у якому КВ відхилені у важкий бік ротора, може бути стійкий тільки на дорезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_0 < 1$ ), але за умови існування, а на зарезонансних швидкостях - нестійкий;
- решта стаціонарних побічних рухів завжди нестійка;
- основний рух  $k = 2^n - 1$ ,  $e_0 > 1$ , у якому КВ відхилені у легкий бік ротора і не можуть зрівноважити великий дисбаланс - стійкий на зарезонансних швидкостях обертання ротора принаймні у випадках, коли ефективна маса КВ набагато менша маси ротора ( $R_m \ll 1$ ) або коли ротор швидко обертається ( $R_0 \gg 1$ ).

в) При дисбалансах, які може зрівноважити АБП, у системи ротор-АБП існують однопараметричні сім'ї квазіперіодичних рухів, у яких КВ обертаються відносно землі майже із сталою кутовою швидкістю і відстають від ротора, а повздожня вісь ротора рухається по гіпоциклоїді, яка є сумою прямої прецесії з цією частотою і прямої нутації з частотою обертання ротора. При цьому:

- серед усіх сімей квазіперіодичних рухів асимптотично стійкі рухи тільки тієї сім'ї, у якій КВ обертаються відносно землі із швидкістю, меншою за резонансну, причому рухи сім'ї стійкі у області власного існування;
- ця сім'я існує на швидкостях обертання ротора, менших за  $R_0^*$  з (5.182) і область існування зменшується із збільшенням сил в'язкого опору в системі;
- області стійкості квазіперіодичних і основних рухів можуть перетинатися, у зв'язку з чим необхідною умовою настання автобалансування на певних швидкостях обертання ротора є неіснування чи нестійкість згаданої вище сім'ї квазіперіодичних рухів.

2. Експериментальними дослідженнями уперше встановлені наступні найбільш істотні результати.

а) Дослідженнями на універсальному стенді кульових АБП з парною і непарною кількістю однакових і різних куль при статичному зрівноваженні вертикально розташованого ротора на ізотропних опорах встановлено:

- на режими руху системи істотно впливають сили в'язкого опору, що діють на кулі;
- при малих силах опору у системи існують одна чи три критичні швидкості, що залежить від дисбалансу, причому у випадку однієї критичної швидкості вона значно перевищує резонансну частоту, а у випадку трьох критичних швидкостей перша - майже дорівнює резонансній частоті, друга - дещо перевищує резонансну частоту, а третя - значно перевищує резонансну частоту;
- якщо ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора, то система ротор-АБП здійснює квазіперіодичний рух, у якому кулі обертаються відносно землі майже із сталою кутовою швидкістю, що дорівнює резонансній частоті (відстають від ротора), а повздожня вісь ротора рухається по гіпоциклоїді, яка є сумою прямої прецесії з цією частотою і прямої нутації з частотою обертання ротора;
- якщо ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора, то автобалансування може настати на швидкостях, які перевищують єдину критичну, або між першою і другою, та над третьою критичними швидкостями, але за умови, що кулі примусово будуть розігнані до швидкості обертання ротора;
- якщо ємності АБП не вистачає для зрівноваження ротора, то з часом настає автобалансування, яке на вибігу ротора зберігається до деякої критичної швидкості, яка значно перевищує резонансну частоту;
- при скінчених силах опору у системи ротор-АБП одна критична швидкість, дещо більша за резонансну частоту, при перевищенні якої настає автобалансування, і воно зберігається на вибігу ротора іноді до швидкостей, менших за резонансну частоту.

б) дослідженнями на стенді ротора з нерухомою віссю динаміки кульового АБП уперше встановлено:

- режими руху ротора істотно залежать від сил в'язкого опору, що діють на кулі;
- майже при відсутності сил опору, що діють на кулі, вони знаходяться у нижній частині бігової доріжки і не можуть розігнатися;
- при малих силах опору спостерігається квазіперіодичний рух, при якому кулі відстають від ротора і обертаються відносно землі із середньою кутовою швидкістю, яка дорівнює резонансній частоті, а

- повздожня вісь ротора коливається навколо нерухомої осі з двома частотами - з цією частотою і частотою обертання ротора;
- при малих силах опору, якщо примусово розігнати ротор, настає автобалансування, яке зберігається на вибігу ротора до досягнення певної критичної швидкості, що значно перевищує резонансну частоту, після чого кулі втрачають швидкість і до повної зупинки ротора знаходяться на нижній частині бігової доріжки;
  - при скінчених силах опору, діючих на кулі, автобалансування відбуває на швидкостях, що дещо перевищують резонансну і зберігаються при падінні швидкості обертання ротора іноді до швидкостей, дещо менших за резонансну.

## РОЗДІЛ 6. ДИНАМІКА АБП, У ЯКИХ КВ ПОВЕРТАЮТЬСЯ НАВКОЛО ПОВЗДОВЖНЬОЇ І ПОПЕРЕЧНОЇ ОСЕЙ РОТОРА

### 6.1. Принципи конструювання АБП, фізична модель і диференціальні рівняння руху системи

1. Виділяємо ознаки, комбінаціями яких створюються АБП, у яких КВ повертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора.

За першу ознаку АБП обраний вид КВ. Вона позначена через AN, де N - номер КВ з рис. 2.7.

За другу ознаку прийнятий спосіб створення КВ: 1 - важке тіло; 2 - поплавок у мастилі; 3 - отвір у суцільному тілі. Вона позначена як BN, де N=1,2,3 - спосіб створення.

За третю ознаку прийнятий спосіб розміщення (виконання) АБП: 1 - усередині порожнього вала чи ротора; 2 - у балансувальній голівці, яка насаджується на торець вала; 3 - на валу у вигляді бандажа. Вона позначена як CN, де N=1,2,3 - номер, що відповідає способу розміщення.

За четверту ознаку прийнята ступінь заповнення корпусу АБП рідиною: 1 – рідини немає; 2 - часткове; 3 – повне. Вона позначена як DN, де N=1,2,3 - номер, що відповідає степені заповнення корпусу рідиною.

Виділені ознаки зібрані у табл. 6.1. При її застосуванні слід мати на увазі, що комбінація певних ознак неможлива.

Табл. 6.1

Ознаки, комбінаціями яких створюються АБП з повздовжньо-  
поперечним рухом КВ

№	Вид КВ, AN	Спосіб утво- рення КВ, BN	Розміщення ( вико- нання) АБП, CN	Заповнення корпусу рі- диною, DN
1	№ КВ	Масивне тіло	Усередині порожнис- того ротора чи вала	Рідини немає
2		Поплавок у рідині	У балансувальній го- лівки, яка насаджується на торець вала	Часткове
3		Отвори у су- цільному тілі	На валу ротора	Повне

На рис. 6.1 наведені приклади синтезу різних схем АБП з повздовжньо-поперечним рухом КВ.

Наприклад, на рис. 6.1, а зображений АБП, створений комбінаціями ознак: A1 - КВ у вигляді з'єднаних під прямим кутом двох маятників; B1 - КВ виконаний у вигляді важкого тіла; C3 - АБП розміщений на валу ротора; D1 - рідини немає.



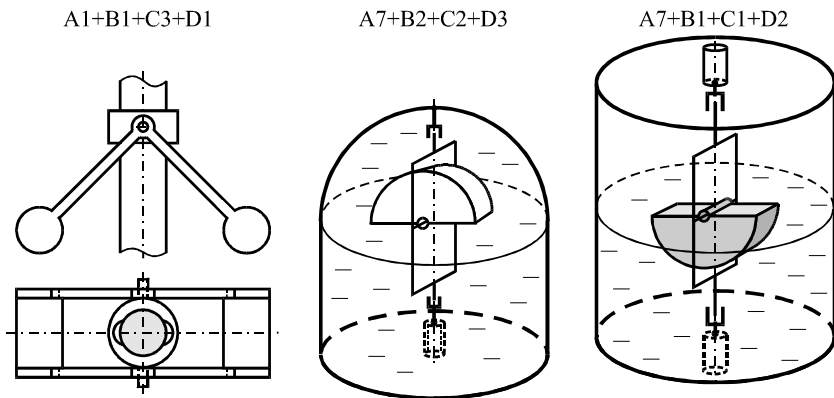
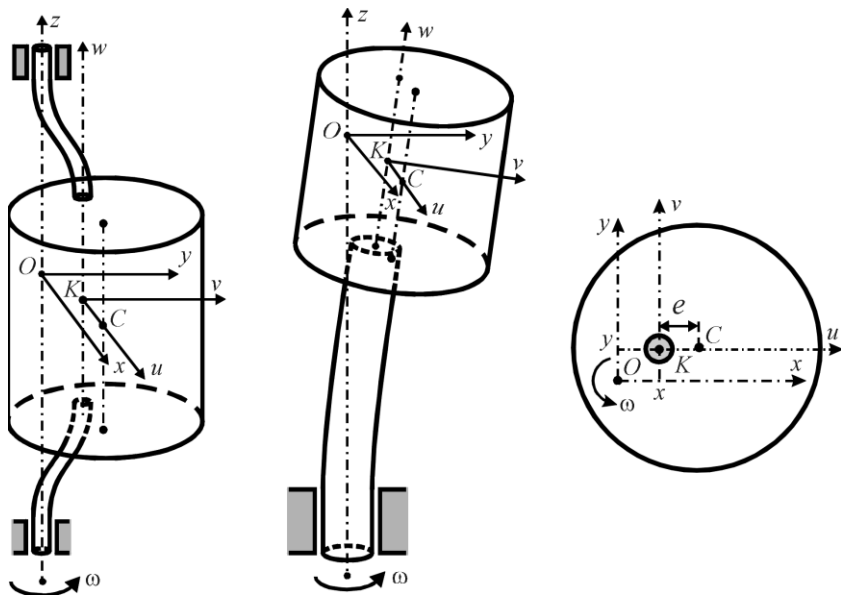


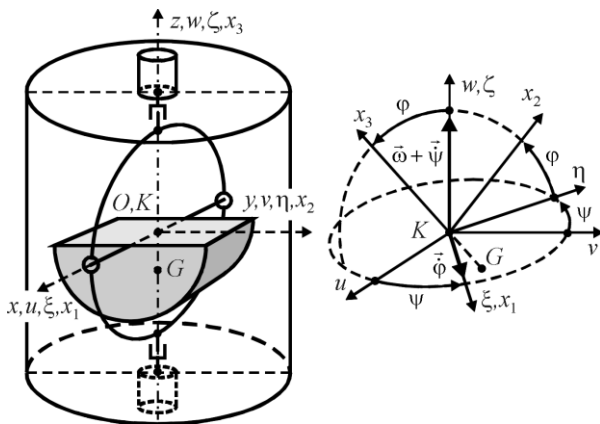
Рис. 6.1. Приклади синтезу АБП з поздовжньо-поперечним рухом KB

2. Описуємо фізичну модель ротора і АБП. Нехай KB має масо-інерційні характеристики, що задовольняють умові (2.7), (2.8). Передбачається, що ротор рухається плоскопаралельно й KB має щодо нього два степені вільності: може повертатися на кут  $\psi$  навколо осі вала ротора; і на кут  $\phi$  навколо осі, перпендикулярній валові (рис. 6.2). При поворотах KB навколо власних осей обертання виникають моменти в'язкого опору  $-H_1\dot{\phi}$ ,  $-H_2\dot{\psi}$ , де  $H_1, H_2$  - коефіцієнти в'язкого тертя. Ротор розташований вертикально і його утримують ізотропні в'язкопружні опори. Для опису руху ротора використовуємо дві прямокутні декартові системи координат. Осі  $Oxuz$  обертаються разом з ротором із сталою швидкістю  $\omega$ , причому вісь  $z$  збігається з віссю обертання, і точка  $O$  знаходиться на рівні точки підвісу KB. Осі  $Kuvw$  жорстко зв'язані з ротором і рівнобіжні осям  $Oxuz$ , причому вісь  $w$  збігається з віссю вала ротора, і при відсутності відхилення вала від осі обертання точки  $K$  і  $O$  співпадають. Відносно осей  $Kuvw$  центр мас ротора має координати  $(e, 0, 0)^T$ , де  $e$  - ексцентриситет.

У процесі руху вал відхиляється від осі обертання на  $\mathbf{r}=\mathbf{OK}$  і на нього починають діяти оновлююча сила  $-cr$  і сила в'язкого опору  $-H_3\mathbf{v}$ , де  $c$  - жорсткість,  $H_3$  - коефіцієнт в'язкого опору опор,  $\mathbf{v}=\mathbf{dr}/dt$  - абсолютна швидкість осі вала ротора (точки  $K$ ). Для опису руху KB використовуємо осі  $K\xi\eta\zeta$ , що виходять із точки підвісу KB і одержуються з осей  $Kuvw$ , після першого повороту KB навколо осі  $w$  на кут  $\psi$ . Осі  $Kx_1x_2x_3$  жорстко зв'язані з KB і одержуються з осей  $K\xi\eta\zeta$  поворотом навколо осі  $\xi=x_1$  на кут  $\phi$ .



а



б

Рис. 6.2. Моделі: а - ротора; б - АБП, в якому КВ обертається навколо похвильної і поперечної осей ротора

**3. Вивід рівнянь руху.** Для складання рівнянь динаміки КВ використовуємо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної системи у вигляді (3.1). За рухомі осі приймаємо  $K\xi\eta\zeta$ . Тоді теорема має вигляд:

$$\frac{d\mathbf{L}_K}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{L}_K + \mathbf{I}_G \times m\mathbf{a}_K = \mathbf{M}_K^{(e)}, \quad \mathbf{L}_K = \boldsymbol{\omega} \tilde{\mathbf{I}}, \quad (6.1)$$

де  $\mathbf{L}_K$  - момент кількості руху КВ щодо точки підвісу,  $d\mathbf{L}_K/dt$  - його похідна в рухомій системі координат  $K\xi\eta\zeta$ ;  $\boldsymbol{\omega}$  - абсолютна швидкість обертання КВ;  $\boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta}$  - кутова швидкість обертання рухомих осей  $K\xi\eta\zeta$ ;  $\mathbf{M}_K^{(e)}$  - головний момент зовнішніх сил, що діють на КВ, знайдений щодо точки  $K$ ;  $\mathbf{a}$  - абсолютне прискорення точки підвісу КВ;  $m$  - маса КВ,  $\tilde{\mathbf{I}}$  - його тензор інерції щодо точки  $K$ . У проєкціях на осі  $K\xi\eta\zeta$  (рис. 1, б):

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega + \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ \omega + \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_K = \begin{bmatrix} A\dot{\phi} \\ 0 \\ B(\omega + \dot{\psi}) \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{L}_K}{dt} = \begin{bmatrix} A\dot{\phi} \\ 0 \\ B\dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ l \sin \phi \\ -l \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Прискорення точки підвісу КВ у проєкціях на осі  $K\xi\eta\zeta$ :

$$\mathbf{a}_K = \mathbf{A}_\psi \mathbf{a}_K^{(xyz)} = \begin{bmatrix} (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \cos \psi + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \sin \psi \\ -(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \sin \psi + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_K^{(xyz)} = \begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

де  $\mathbf{A}_\psi$  - матриця перетворення координат  $x, y, z$  у  $\xi, \eta, \zeta$ ;  $\mathbf{a}_K^{(xyz)}$  - прискорення точки підвісу КВ у проєкціях на осі  $Oxyz$ . 3 активних зовнішніх сил моменти утворюють сили ваги і умовно віднесені до активних - сили в'язкого тертя:

$$\mathbf{M}_K^{(r)} = \begin{bmatrix} -H_1\dot{\phi} \\ 0 \\ -H_2\dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_K(-mg\mathbf{k}) = -\mathbf{I}_G \times m\mathbf{g} = \begin{bmatrix} -mgl \sin \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

де  $\mathbf{M}_K^{(r)}$  - моменти сил в'язкого тертя;  $\mathbf{M}_K(-mg\mathbf{k})$  - момент сил ваги КВ;  $\mathbf{k}$  - одиничний вектор, спрямований вертикально угору. Підставляючи (6.2)-(6.4) у (6.1) і перетворюючи, одержимо наступні рівняння динаміки КВ:

$$A\ddot{\phi} + H_1\dot{\phi} + mgl \sin \varphi -$$

$$- ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \sin \psi - (\dot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \cos \psi] \cos \varphi = 0,$$

$$B\ddot{\psi} + H_2\dot{\psi} - ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \cos \psi + (\dot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \sin \psi] \sin \varphi = 0. \quad (6.5)$$

Для одержання рівнянь динаміки ротора щодо рухомих осей  $Oxyz$  використовуємо теорему про рух центра мас матеріальної системи у вигляді (3.5)

$$M_{\Sigma} \left[ \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{xyz} \times \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\omega}_{xyz} \times (\boldsymbol{\omega}_{xyz} \times \mathbf{r}_C) + 2\boldsymbol{\omega}_{xyz} \times \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \right] = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (6.6)$$

де  $M_{\Sigma} = M + m$  - маса системи;  $\mathbf{r}$  - радіус-вектор центра мас системи,  $d\mathbf{r}/dt$ ,  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  - його перша і друга похідні щодо осей  $Oxyz$ ;  $\boldsymbol{\omega}_{xyz}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{xyz}$  - кутові швидкість і прискорення обертання осей  $Oxyz$ ;  $\mathbf{R}^{(e)}$  - головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему. У проекціях на осі  $Oxyz$ :

$$M_{\Sigma} \mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} M(x + e) + m(x - l \sin \varphi \sin \psi) \\ My + m(y + l \sin \varphi \cos \psi) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_{xyz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{xyz} = 0, \quad \mathbf{R}^{(e)} = -c\mathbf{r}_K - H_3 \mathbf{v}_K, \quad \mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_K = \frac{d\mathbf{r}_K}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{xyz} \times \mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

де  $x$ ,  $y$  - координати точки  $K$  щодо осей  $Oxyz$ . Підставляючи (6.7) у (6.6), перетворюючи, і проектуючи на осі  $x$ ,  $y$ , одержимо наступні рівняння динаміки ротора:

$$M_{\Sigma}(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) + H_3(\dot{x} - \omega y) + cx - ml\{[\dot{\phi} \sin \psi + 2\dot{\phi}(\omega + \dot{\psi}) \cos \psi] \cos \varphi +$$

$$+ [\ddot{\psi} \cos \psi - (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\omega\dot{\psi}) \sin \psi] \sin \varphi - (\sin \varphi \sin \psi - Me/ml)\omega^2\} = 0,$$

$$M_{\Sigma}(\dot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) + H_3(\dot{y} + \omega x) + cy + ml\{[\dot{\phi} \cos \psi - 2\dot{\phi}(\omega + \dot{\psi}) \sin \psi] \cos \varphi -$$

$$- [\ddot{\psi} \sin \psi + (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\omega\dot{\psi}) \cos \psi] \sin \varphi - \omega^2 \sin \varphi \cos \psi\} = 0, \quad (6.8)$$

Таким чином, динаміку системи визначають дванадцять розмірних параметрів.

**4.** Приводимо рівняння динаміки до безрозмірного вигляду. Уводимо параметри:

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_{\Sigma}}, \quad \rho_1 = \sqrt{A/m}, \quad \rho_2 = \sqrt{B/m}, \quad (6.9)$$

де:  $\omega_0$  - резонансна частота – частота власних коливань ротора при нерухомому щодо ротора КВ, відсутності обертання ротора і не врахуванні сил опору;  $\rho_{1/2}$  - осьові радіуси інерції КВ. Уводимо безрозмірні змінні:

$$\xi = \frac{xl}{\rho_1^2}, \quad \eta = \frac{yl}{\rho_1^2}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \left( \frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \right). \quad (6.10)$$

Уводимо безрозмірні параметри:

$$R_m = \frac{ml^2}{M_\Sigma \rho_1^2}, \quad R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad R_g^2 = \frac{gl}{\rho_1^2 \omega_0^2}, \quad R_\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad h_{1/2} = \frac{H_{1/2}}{m \rho_{1/2}^2 \omega_0},$$

$$H = \frac{H_3}{M_\Sigma \omega_0}, \quad e_0 = \frac{Me}{ml}. \quad (6.11)$$

Після перетворень рівняння динаміки (6.5), (6.8) приймуть наступний безрозмірний вигляд:

$$l_1 = \ddot{\phi} + h_1 \dot{\phi} + R_g^2 \sin \varphi - [(\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi) \sin \psi - (\ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta) \cos \psi] \cos \varphi = 0,$$

$$l_2 = (\ddot{\psi} + h_2 \dot{\psi}) R_\rho^2 - [(\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi) \cos \psi + (\ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta) \sin \psi] \sin \varphi = 0,$$

$$l_3 = \ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi + H(\dot{\xi} - R_\omega \eta) + \xi - R_m \{ [\dot{\phi} \sin \psi + 2(R_\omega + \dot{\psi}) \dot{\phi} \cos \psi] \cos \varphi +$$

$$+ [\dot{\psi} \cos \psi - (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_\omega \dot{\psi}) \sin \psi] \sin \varphi + R_\omega^2 (e_0 - \sin \varphi \sin \psi) \} = 0,$$

$$l_4 = \ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta + H(\dot{\eta} + R_\omega \xi) + \eta - R_m \{ [\dot{\psi} \sin \psi + (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_\omega \dot{\psi}) \cos \psi] \sin \varphi -$$

$$- [\dot{\phi} \cos \psi - 2(R_\omega + \dot{\psi}) \dot{\phi} \sin \psi] \cos \varphi + R_\omega^2 \sin \varphi \cos \psi \} = 0, \quad (6.12)$$

де точка над змінною означає вже похідну за  $\tau$ , а не за  $t$ . Таким чином, динаміку системи визначають вісім безрозмірних параметрів, визначених у (6.11).

Переходимо до нерухомої (безрозмірної) системи координат

$$\psi = -R_\omega \tau + \alpha, \quad \xi = x \cos R_\omega \tau + y \sin R_\omega \tau, \quad \eta = -x \sin R_\omega \tau + y \cos R_\omega \tau, \quad (6.13)$$

де  $x, y$  – деякі нерухомі безрозмірні осі,  $\alpha$  - кут, що відраховується від осі  $x$  і визначає поворот КВ навколо повздовжньої осі ротора. Перетворюючи ліві частини диференціальних рівнянь руху (6.12) за алгоритмами

$$L_1 = l_1, \quad L_2 = l_2, \quad L_3 = l_3 \cos R_\omega \tau - l_4 \sin R_\omega \tau, \quad L_4 = l_3 \sin R_\omega \tau + l_4 \cos R_\omega \tau, \quad (6.14)$$

одержимо наступні безрозмірні диференціальні рівняння руху системи у нерухомих осях:

$$L_1 = \ddot{\phi} + h_1 \dot{\phi} + R_g^2 \sin \varphi + (\ddot{y} \cos \alpha - \ddot{x} \sin \alpha) \cos \varphi = 0,$$

$$L_2 = [\ddot{\alpha} + h_2 (\dot{\alpha} - R_\omega)] R_\rho^2 - (\ddot{x} \cos \alpha + \ddot{y} \sin \alpha) \sin \varphi = 0,$$

$$L_3 = \ddot{x} + H \dot{x} + x - R_m \{ (\ddot{\phi} \sin \alpha + 2\dot{\alpha} \dot{\phi} \cos \alpha) \cos \varphi +$$

$$+ [\ddot{\alpha} \cos \alpha - (\dot{\phi}^2 + \dot{\alpha}^2) \sin \alpha] \sin \varphi + R_\omega^2 e_0 \cos R_\omega \tau \} = 0,$$

$$L_4 = \ddot{y} + H\dot{y} + y - R_m \{ [\ddot{\alpha} \sin \alpha + (\dot{\phi}^2 + \dot{\alpha}^2) \cos \alpha] \sin \varphi - \\ - [\dot{\phi} \cos \alpha - 2\dot{\alpha} \dot{\phi} \sin \alpha] \cos \varphi + R_{\omega}^2 e_0 \sin R_{\omega} \tau \} = 0. \quad (6.15)$$

Вводимо нові комплексні змінні

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad (6.16)$$

і перетворюємо ліві частини рівнянь (6.15) за алгоритмами

$$c_1 = L_1, \quad c_2 = L_2, \quad c_3 = L_3 + iL_4, \quad c_4 = L_3 - iL_4. \quad (6.17)$$

Одержуємо безрозмірні диференціальні рівняння руху системи у нерухомих осях у комплексному вигляді

$$c_1 = \ddot{\phi} + h_1 \dot{\phi} + R_g^2 \sin \varphi - \frac{i}{2} (\ddot{z} e^{-i\alpha} - \ddot{\bar{z}} e^{i\alpha}) \cos \varphi = 0, \\ c_2 = [\ddot{\alpha} + h_2 (\dot{\alpha} - R_{\omega})] R_p^2 - \frac{1}{2} (\ddot{z} e^{-i\alpha} + \ddot{\bar{z}} e^{i\alpha}) \sin \varphi = 0, \\ c_3 = \ddot{z} + H\dot{z} + z - \\ - R_m \{ [(2\dot{\alpha} \dot{\phi} - i\ddot{\phi}) \cos \varphi + [\ddot{\alpha} + i(\dot{\phi}^2 + \dot{\alpha}^2)] \sin \varphi] e^{i\alpha} + R_{\omega}^2 e_0 e^{iR_{\omega} \tau} \} = 0, \\ c_4 = \bar{c}_3. \quad (6.18)$$

Переходимо до рухомих осей, що обертаються із сталою кутовою швидкістю  $\Omega$ . Вводимо нові координати

$$\alpha = \Omega\tau + \beta, \quad z = q e^{i\Omega\tau}. \quad (6.19)$$

Тоді

$$\dot{\alpha} = \Omega + \dot{\beta}, \quad \ddot{\alpha} = \ddot{\beta}, \quad \dot{z} = (\dot{q} + i\Omega q) e^{i\Omega\tau}, \quad \ddot{z} = (\ddot{q} + 2i\Omega\dot{q} - \Omega^2 q) e^{i\Omega\tau}. \quad (6.20)$$

Перетворюємо рівняння (6.18) за алгоритмом:

$$r_1 = c_1, \quad r_2 = c_2, \quad r_3 = c_3 e^{-i\Omega\tau}, \quad r_4 = c_4 e^{i\Omega\tau}. \quad (6.21)$$

Одержуємо безрозмірні диференціальні рівняння руху системи у рухомих осях, які обертаються з швидкістю  $\Omega$  у комплексному вигляді

$$r_1 = \ddot{\phi} + h_1 \dot{\phi} + R_g^2 \sin \varphi - \\ - \frac{i}{2} [(\ddot{q} + 2i\Omega\dot{q} - \Omega^2 q) e^{-i\beta} - (\ddot{\bar{q}} + 2i\Omega\dot{\bar{q}} - \Omega^2 \bar{q}) e^{i\beta}] \cos \varphi = 0, \\ r_2 = [\ddot{\beta} + h_2 (\dot{\beta} + \Omega - R_{\omega})] R_p^2 - \\ - \frac{1}{2} [(\ddot{q} + 2i\Omega\dot{q} - \Omega^2 q) e^{-i\beta} + (\ddot{\bar{q}} + 2i\Omega\dot{\bar{q}} - \Omega^2 \bar{q}) e^{i\beta}] \sin \varphi = 0, \\ r_3 = \ddot{q} + 2i\Omega\dot{q} - \Omega^2 q + H(\dot{q} + i\Omega q) + q - \\ - R_m \{ [(2(\dot{\beta} + \Omega)\dot{\phi} - i\ddot{\phi}) \cos \varphi + [\ddot{\beta} + i(\dot{\phi}^2 + (\dot{\beta} + \Omega)^2)] \sin \varphi] e^{i\alpha} + R_{\omega}^2 e_0 e^{i(R_{\omega} - \Omega)\tau} \} = 0, \\ r_4 = \bar{r}_3. \quad (6.22)$$

Якщо рухомі осі синхронно обертаються з ротором, то:

$$\Omega = R_\omega, \quad \beta = \psi, \quad q = s. \quad (6.23)$$

Підставляючи це в рівняння (6.22), одержуємо безрозмірні диференціальні рівняння руху системи у рухомих осях, які обертаються з швидкістю  $R_\omega$  у комплексному вигляді:

$$\begin{aligned} r_1 &= \ddot{\phi} + h_1 \dot{\phi} + R_g^2 \sin \phi - \\ &\quad - \frac{i}{2} [(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) e^{-i\psi} - (\ddot{\bar{s}} + 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s}) e^{i\psi}] \cos \phi = 0, \\ r_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_p^2 - \frac{1}{2} [(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) e^{-i\psi} + (\ddot{\bar{s}} + 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s}) e^{i\psi}] \sin \phi = 0, \\ r_3 &= \ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s - \\ &\quad - R_m \langle \{2(\dot{\psi} + R_\omega) \dot{\phi} - i\ddot{\phi}\} \cos \phi + [\ddot{\psi} + i(\dot{\phi}^2 + (\dot{\psi} + R_\omega)^2)] \sin \phi \rangle e^{i\psi} + R_\omega^2 e_0 = 0, \\ r_4 &= \bar{r}_3. \end{aligned} \quad (6.24)$$

## 6.2. Дослідження кількості і умов існування усталених рухів системи, у яких КВ обертаються синхронно з ротором

Досліджені усталені рухи системи ротор – АБП, у яких КВ обертаються синхронно з ротором. Зокрема, розглянуті випадки: невеликого впливу (неврахування) сил опору і сил ваги; невеликих сил зовнішнього опору; врахування сил зовнішнього опору і сил ваги. Встановлена кількість усталених рухів, знайдені умови їх існування і властивості.

### 6.2.1. Розв'язання рівнянь усталених рухів у параметричному вигляді

Використовуємо диференціальні рівняння руху системи у вигляді (6.12). В усталених рухах КВ припиняють рух відносно ротора, похідні стають рівними нулю. Покладаючи в системі (6.12) похідні рівними нулю, з точністю до знаків отримуємо наступні рівняння усталених рухів ротора і АБП:

$$\begin{aligned} s_1 &= (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) R_\omega^2 \cos \tilde{\phi} + R_g^2 \sin \tilde{\phi} = 0, \\ s_2 &= (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) R_\omega^2 \sin \tilde{\phi} = 0, \\ s_3 &= (R_\omega^2 - 1) \tilde{\xi} + HR_\omega \tilde{\eta} + R_m R_\omega^2 (e_0 - \sin \tilde{\phi} \sin \tilde{\psi}) = 0, \\ s_4 &= -HR_\omega \tilde{\xi} + (R_\omega^2 - 1) \tilde{\eta} + R_m R_\omega^2 \sin \tilde{\phi} \cos \tilde{\psi} = 0, \end{aligned} \quad (6.25)$$

де  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$  - усталені значення безрозмірних змінних, що визначають положення системи.

Рівняння (6.25) допускають розв'язки у двох взаємовиключних випадках:

$$\begin{aligned} 1) \sin \tilde{\varphi} = 0, \quad \tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi} = 0; \\ 2) \sin \tilde{\varphi} \neq 0, \quad \tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi} = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Розглянемо їх окремо.

**1.** Випадок, коли  $\sin \tilde{\varphi} = 0$ . Це можливо у двох принципово різних випадках:

$$\tilde{\varphi}_1 = 0, \quad \tilde{\varphi}_2 = \pi. \quad (6.27)$$

Останні два рівняння системи (6.25) приймають вигляд

$$\begin{aligned} s_3 = (R_\omega^2 - 1)\tilde{\xi} + HR_\omega\tilde{\eta} + R_m R_\omega^2 e_0 = 0, \\ s_4 = -HR_\omega\tilde{\xi} + (R_\omega^2 - 1)\tilde{\eta} = 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Звідси знаходимо:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} = -\frac{R_m R_\omega^2 e_0 (R_\omega^2 - 1)}{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}, \quad \tilde{\eta} = -\frac{R_m R_\omega^2 e_0 HR_\omega}{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}, \\ \tilde{r} = \sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2} = \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

де  $\tilde{r}$  - безрозмірне відхилення вала від осі обертання.

Для визначення  $\tilde{\psi}$  розглянемо

$$\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi} = -\frac{R_m R_\omega^2 e_0 [(R_\omega^2 - 1) \sin \tilde{\psi} - HR_\omega \cos \tilde{\psi}]}{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}} = 0.$$

Звідси знаходимо

$$\operatorname{tg} \tilde{\psi} = HR_\omega / (R_\omega^2 - 1). \quad (6.30)$$

В першому русі  $\varphi_1 = 0$  КВ під точкою підвісу, а у другому  $\varphi_2 = \pi$  - над. Ці рухи існують при будь-якому дисбалансі для будь-яких швидкостей обертання ротора.

**2.** Випадок, коли  $\sin \tilde{\varphi} \neq 0$ . Знайдемо розв'язок системи у параметричному виді. Друге рівняння в (6.25) буде виконуватися, якщо

$$\cos \tilde{\psi} = \pm \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{r}}, \quad \sin \tilde{\psi} = \mp \frac{\tilde{\xi}}{\tilde{r}}, \quad \tilde{r} = \sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2}. \quad (6.31)$$

З цього випливає, що друга вісь обертання КВ перпендикулярна вектору відхилення вала від осі обертання і тому КВ відхиляється в бік вектора відхилення, чи у протилежний бік.



У випадку, коли балансувальної ємності КВ вистачає для зрівноваження ротора, вводимо у розглядання кут

$$\varphi_0 = \arcsin e_0, \quad e_0 < 1. \quad (6.32)$$

Розв'яжемо систему (6.25) у параметричному вигляді відносно  $u = \cos \varphi$ . З перших двох рівнянь в (6.25) знаходимо

$$\tilde{\zeta} = -\frac{R_g^2}{R_\omega^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi}, \quad \tilde{\eta} = \frac{R_g^2}{R_\omega^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi}, \quad \operatorname{tg} \tilde{\psi} = -\frac{\tilde{\zeta}}{\tilde{\eta}}. \quad (6.33)$$

Тоді після перетворень останні два рівняння в (6.25) приводяться до виду

$$\begin{aligned} s_3: & -\left[ \left( R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u \right) \sin \tilde{\psi} - H R_\omega \cos \tilde{\psi} \right] \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = -\frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} e_0, \\ s_4: & \left[ H R_\omega \sin \tilde{\psi} + \left( R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u \right) \cos \tilde{\psi} \right] \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = 0, \\ & u = \cos \tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Звідси знаходимо наступне рівняння для визначення параметра  $u$

$$(1 - u^2) \left[ \left( R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u \right)^2 + H^2 R_\omega^2 \right] = \frac{R_m^2 R_\omega^8}{R_g^4} e_0^2 u^2. \quad (6.35)$$

Теж саме у вигляді полінома

$$\begin{aligned} P(u) = & R_m^2 R_\omega^8 u^4 + 2R_m R_g^2 R_\omega^4 (R_\omega^2 - 1) u^3 + \{ [(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2] R_g^4 - R_m^2 R_\omega^8 (1 - e_0^2) \} u^2 - \\ & - 2R_m R_g^2 R_\omega^4 (R_\omega^2 - 1) u - [(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2] R_g^4 = 0. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Оскільки це рівняння є поліномом четвертого степеня відносно параметра  $u$ , то воно має чотири кореня, серед яких нас цікавлять дійсні корені, що за модулем менші, чи дорівнюють 1.

З рівнянь (6.25) знаходимо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = & \pm \frac{R_m R_\omega^4 e_0}{R_g^2 \sqrt{\left( R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u \right)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \\ \sin \tilde{\psi} = & \pm \frac{R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u}{\sqrt{\left( R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u \right)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \quad \cos \tilde{\psi} = \mp \frac{H R_\omega}{\sqrt{\left( R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u \right)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\tilde{\psi} = -\frac{R_{\omega}^2 - 1 + \frac{R_m R_{\omega}^4}{R_g^2} u}{HR_{\omega}}, \quad (6.37)$$

де в наведених формулах треба одночасно брати всі верхні, чи нижні знаки.

Підставляючи (6.37) в (6.33), отримаємо

$$\tilde{\xi} = -\frac{R_m R_{\omega}^2 e_0 \left( R_{\omega}^2 - 1 + \frac{R_m R_{\omega}^4}{R_g^2} u \right)}{\left( R_{\omega}^2 - 1 + \frac{R_m R_{\omega}^4}{R_g^2} u \right)^2 + H^2 R_{\omega}^2}, \quad \tilde{\eta} = -\frac{R_m R_{\omega}^2 e_0 HR_{\omega}}{\left( R_{\omega}^2 - 1 + \frac{R_m R_{\omega}^4}{R_g^2} u \right)^2 + H^2 R_{\omega}^2},$$

$$\tilde{r} = \sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2} = \frac{R_m R_{\omega}^2 e_0}{\sqrt{\left( R_{\omega}^2 - 1 + \frac{R_m R_{\omega}^4}{R_g^2} u \right)^2 + H^2 R_{\omega}^2}}. \quad (6.38)$$

Зробимо наступне зауваження. З формул (6.37) і (6.38) видно, що заміна знака у кута  $\tilde{\varphi}$  не змінює  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \operatorname{tg}\tilde{\psi}$ , і приводить до: повороту КВ навколо цієї осі на той самий кут, але у протилежному напрямку; зміни знаків перед  $\sin\tilde{\psi}, \cos\tilde{\psi}$ . Останнє приводить до повороту другої осі обертання КВ на  $180^{\circ}$ . Тому відносно ротора КВ відхилиться у той же бік і на той же кут. Отже, заміна знака перед  $\tilde{\varphi}$  разом із зміною знака у  $\psi$ , не дає нового руху.

Зробимо попередню оцінку кількості принципово відмінних усталених рухів. Поліном четвертого порядку (6.36) може мати не більше чотирьох коренів. Якщо всі вони дійсні і за модулем менші одиниці, то це дає чотири рівняння вигляду  $\cos\tilde{\varphi}_i = \tilde{u}_i, /i = \overline{1,4}/$ . Корені цих рівнянь

$$\tilde{\varphi}_i^{(1/2)} = \pm \arccos \tilde{u}_i, /i = \overline{1,4}/.$$

З зауваження до рівнянь (6.37), (6.38) випливає, що зміна знака у кута  $\tilde{\varphi}$  не приводить до нового істотно відмінного розв'язку. Тому чотири корені поліному (6.36) даватимуть чотири істотно відмінних усталених рухи системи. Оскільки поліном (6.36) має дійсні коефіцієнти, то він може мати 0, 2 чи 4 дійсних коренів. Оскільки

$$P(0) = -[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2] R_g^4 < 0, \quad P(\pm 1) = R_m^2 R_\omega^8 e_0^2 > 0,$$

то в інтервалі  $u \in (-1, 1)$  поліном  $P(u)$  має два чи чотири корені, тому система має два чи чотири істотно відмінних усталених рухи.

При непрацюючому АБП  $\varphi = \psi = 0$  і останні два рівняння в системі (6.25), які характеризують рух центра мас системи приймуть вигляд (6.28), звідки знаходимо безрозмірне відхилення вала від осі обертання при непрацюючому АБП:

$$\tilde{r}_0 = \sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2} = \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}}. \quad (6.39)$$

Введемо величину, що характеризує ефективність зрівноваження ротора АБП:

$$n = \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_0} = \frac{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}}{\sqrt{\left(R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u\right)^2 + H^2 R_\omega^2}}. \quad (6.40)$$

Величина  $1/n$  показує, в скільки разів зміниться відхилення вала від осі обертання при включенні АБП.

У подальшому будемо називати рухами першої групи усталені рухи, у яких  $\sin \tilde{\varphi} \neq 0$ , і рухами другої групи усталені рухи, у яких  $\sin \tilde{\varphi} = 0$ .

### 6.2.2. Рухи першої групи у випадку нехтування силами ваги і силами зовнішнього опору

Припустимо, що вплив сил зовнішнього опору і сил ваги незначний і ними можна знехтувати

$$H=0, \quad R_g=0. \quad (6.41)$$

Тоді рівняння усталених рухів (6.25) набудуть вигляд

$$\begin{aligned} s_1 &= R_\omega^2 (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) \cos \tilde{\varphi} = 0, \\ s_2 &= R_\omega^2 (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) \sin \tilde{\varphi} = 0, \\ s_3 &= (R_\omega^2 - 1) \tilde{\xi} + R_m R_\omega^2 (e_0 - \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi}) = 0, \\ s_4 &= (R_\omega^2 - 1) \tilde{\eta} + R_m R_\omega^2 \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi} = 0. \end{aligned} \quad (6.42)$$

З врахуванням перших двох рівнянь

$$\begin{aligned} s_3 \sin \tilde{\psi} - s_4 \cos \tilde{\psi} &= R_m R_\omega^2 (e_0 \sin \tilde{\psi} - \sin \tilde{\varphi}) + (R_\omega^2 - 1) (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) = 0, \\ s_3 \cos \tilde{\psi} + s_4 \sin \tilde{\psi} &= R_m R_\omega^2 e_0 \cos \tilde{\psi} = 0. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Перейдемо до повернутих осей  $\tilde{u}, \tilde{v}$ , які утворюються з осей  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$

поворотом проти ходу стрілки годинника на кут  $\tilde{\psi}$  :

$$\tilde{u} = \tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}, \quad \tilde{v} = \tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}. \quad (6.44)$$

Тоді перші два рівняння в (6.42) і рівняння (6.43) будуть еквівалентні наступним рівнянням:

$$\tilde{u} \cos \tilde{\varphi} = 0, \quad \tilde{v} \sin \tilde{\varphi} = 0, \quad R_m R_\omega^2 (e_0 \sin \tilde{\psi} - \sin \tilde{\varphi}) + (R_\omega^2 - 1) \tilde{u} = 0, \quad \cos \tilde{\psi} = 0. \quad (6.45)$$

З четвертого рівняння знаходимо

$$\tilde{\psi} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin \tilde{\psi} = \pm 1. \quad (6.46)$$

Оскільки між вектором дисбалансу і другою віссю обертання прямий кут, то КВ в усіх усталених рухах відхиляється точно в важкий або легкий бік ротора. З загальної властивості усталених рухів, які розглядаються, випливає, що вал відхиляється від осі обертання також у важкий чи легкий бік ротора.

З третього рівняння в (6.45) видно, що із зміною знака у кута  $\tilde{\psi}$ , він змінюється на  $180^\circ$  і при цьому змінюються знаки у  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{u}$ . З цього випливає, що КВ і вал відхиляються у той самий бік відносно ротора, що і до зміни кута  $\tilde{\psi}$ . Тому зміна знака не дає істотно нових усталених рухів. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що кут  $\tilde{\psi}$  більше нуля. Тоді система рівнянь (6.45) дає нам таку систему для визначення  $\tilde{u}, \tilde{\varphi}$ :

$$\tilde{u} \cos \tilde{\varphi} = 0, \quad R_m R_\omega^2 (e_0 - \sin \tilde{\varphi}) + (R_\omega^2 - 1) \tilde{u} = 0. \quad (6.47)$$

Розглянемо можливі випадки.

1. Припустимо, що АБП усунув відхилення вала від осі обертання. Тоді  $\tilde{u} = 0$  і з другого рівняння (6.47) знаходимо

$$e_0 - \sin \tilde{\varphi} = 0.$$

За умови, що ємності КВ вистачає для зрівноваження ротора ( $e_0 \leq 1$ ), це рівняння допускає два істотно відмінних розв'язки  $\tilde{\varphi}_{1,2}$ :

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0, \quad \tilde{\varphi}_2 = \pi - \varphi_0 \quad (\varphi_0 = \arcsin e_0). \quad (6.48)$$

У першому усталеному русі центр мас КВ знаходиться під точкою підвісу і він відхилений у легкий бік ротора на кут, який потрібен для зрівноваження дисбалансу. У другому усталеному русі, на відміну від першого, центр мас КВ знаходиться над точкою підвісу. Оскільки ротор у цих рухах зрівноважений, то це основні рухи. Положення КВ відносно ротора у цих рухах зображені на рис. 6.3, а, б.

2. Припустимо, що не усунуте відхилення вала від осі обертання. Тоді  $\tilde{u} \neq 0$  і з першого рівняння в (6.47) знаходимо

$$\cos \tilde{\varphi} = 0. \quad (6.49)$$

Істотно відмінними розв'язками цього рівняння є

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3 &= -\frac{\pi}{2}, \quad \tilde{\varphi}_4 = \frac{\pi}{2}, \quad e_0 \leq 1; \\ \tilde{\varphi}_1 &= \frac{\pi}{2}, \quad \tilde{\varphi}_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad e_0 > 1. \end{aligned} \quad (6.50)$$

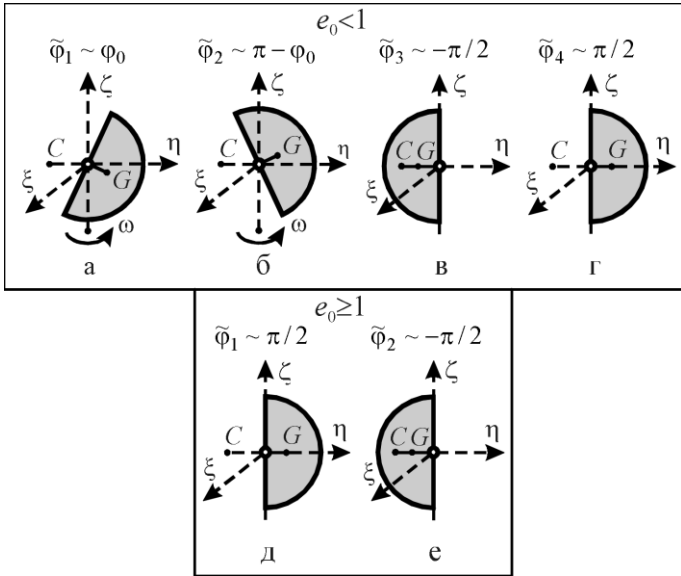


Рис. 6.3. Граничні положення КВ відносно ротора в усталених рухах першої групи, випадки:

$e_0 < 1$  - а, б - основні рухи, в, г - побічні;  
 $e_0 \geq 1$  - д - основний рух, е - побічний

З розв'язків (6.50) робимо такі висновки.

1) При дисбалансі, який КВ може зрівноважити, у системи є ще два усталених рухи  $\tilde{\varphi}_3$ ,  $\tilde{\varphi}_4$ . У русі  $\tilde{\varphi}_3$  КВ максимально відхилений у важкий бік ротора, а у русі  $\tilde{\varphi}_4$  - у легкий. Це зображено на рис. 6.3, в, г. Оскільки ротор у цих рухах не зрівноважений, то вони є побічними.

2) При дисбалансах, які КВ не може зрівноважити, система має тільки два усталених рухи  $\tilde{\varphi}_1$ ,  $\tilde{\varphi}_2$ . У русі  $\tilde{\varphi}_1$  КВ максимально відхилений у легкий бік ротора, чим найбільше зрівноважує його. У русі  $\tilde{\varphi}_2$  - КВ найбільше відхилений у важкий бік ротора, чим максимально збільшує дисбаланс системи. Тому рух  $\tilde{\varphi}_1$  - основний, а  $\tilde{\varphi}_2$  - побічний. Положення КВ відносно ротора зображені на рис. 6.3, д, е.

Зауважимо, що у граничному випадку

$$e_0 = 1: \quad \tilde{\varphi}_{1,2,4} = \frac{\pi}{2}, \quad \tilde{\varphi}_3 = -\frac{\pi}{2} \quad (6.51)$$

- три рухи зливаються. Тому у просторі параметрів точка  $e_0=1$  є точкою бифуркації положень рівноваги.

### 6.2.3. Рухи першої групи у випадку нехтування силами зовнішнього опору

Дослідимо усталені рухи системи за умови, що сили зовнішнього опору відсутні або настільки малі, що ними можна знехтувати

$$H=0. \quad (6.52)$$

Подамо рівняння (6.34) у вигляді

$$\begin{aligned} -\frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} (e_0 - \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi}) + [(R_\omega^2 - 1) \sin \tilde{\psi} - H R_\omega \cos \tilde{\psi}] \operatorname{tg} \tilde{\varphi} &= 0, \\ -\frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi} - [H R_\omega \sin \tilde{\psi} + (R_\omega^2 - 1) \cos \tilde{\psi}] \operatorname{tg} \tilde{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Помножимо перше рівняння на  $\sin \tilde{\psi}$  і віднімемо від нього друге рівняння, помножене на  $\cos \tilde{\psi}$ . Помножимо перше рівняння на  $\cos \tilde{\psi}$  і додамо до нього друге рівняння, помножене на  $\sin \tilde{\psi}$ . Одержимо

$$\begin{aligned} -\frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} (e_0 \sin \tilde{\psi} - \sin \tilde{\varphi}) + (R_\omega^2 - 1) \operatorname{tg} \tilde{\varphi} &= 0, \\ -\frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} e_0 \cos \tilde{\psi} - H R_\omega \operatorname{tg} \tilde{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (6.53)$$

З цих рівнянь знаходимо

$$\sin \tilde{\psi} = \frac{(R_\omega^2 - 1) R_g^2}{R_m R_\omega^4 e_0} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} + \frac{\sin \tilde{\varphi}}{e_0}, \quad \cos \tilde{\psi} = -\frac{H R_g^2}{R_m R_\omega^3 e_0} \operatorname{tg} \tilde{\varphi}. \quad (6.54)$$

З другого рівняння в (6.54), при  $H=0$ , випливає, що

$$\cos \tilde{\psi} = 0, \quad \sin \tilde{\psi} = \pm 1, \quad \tilde{\psi} = \pm \pi/2. \quad (6.55)$$

З цього випливає, що друга вісь обертання КВ перпендикулярна вектору дисбалансу. При цьому вектор відхилення осі вала лежить на одній лінії з вектором дисбалансу.

З врахуванням (6.55) перше рівняння в (6.54) буде еквівалентне двом таким рівнянням

$$1 = \frac{(R_\omega^2 - 1)R_g^2}{R_m R_\omega^4 e_0} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\sin \varphi}{e_0}, \quad -1 = \frac{(R_\omega^2 - 1)R_g^2}{R_m R_\omega^4 e_0} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\sin \varphi}{e_0}. \quad (6.56)$$

Заміною кута  $\varphi$  на  $-\varphi$  перше рівняння приводиться до вигляду другого. З іншого боку, перше рівняння відрізняється від другого тим, що другі осі обертання КВ повернені в цих рухах на  $180^\circ$  по відношенню один до одного. Тому КВ в обох випадках відхиляється в один і той же бік відносно ротора. Значить розв'язки двох рівнянь (6.56) дають однакові усталені рухи. Тому, не обмежуючи загальності, будемо досліджувати корені першого рівняння в (6.56). Представимо це рівняння у вигляді

$$\sin \tilde{\varphi} - e_0 = a \operatorname{tg} \tilde{\varphi}, \quad a = \frac{(1 - R_\omega^2)R_g^2}{R_m R_\omega^4}, \quad -\frac{R_g^2}{4R_m} \leq a < +\infty. \quad (6.57)$$

Зауважимо, що параметр  $a$  набуває найменше значення при  $R_\omega = \sqrt{2}$ .

**1.** Розглянемо випадок дисбалансів, які АБП може зрівноважити ( $e_0 < 1$ ). На рис. 6.4, а показаний графік функції  $\sin \tilde{\varphi} - e_0$  - товста лінія, і графіки функції  $a \operatorname{tg} \tilde{\varphi}$  при  $R_\omega \rightarrow +0$  - тонка суцільна лінія, і при  $R_\omega \rightarrow 1-0$  - тонкий пунктир.

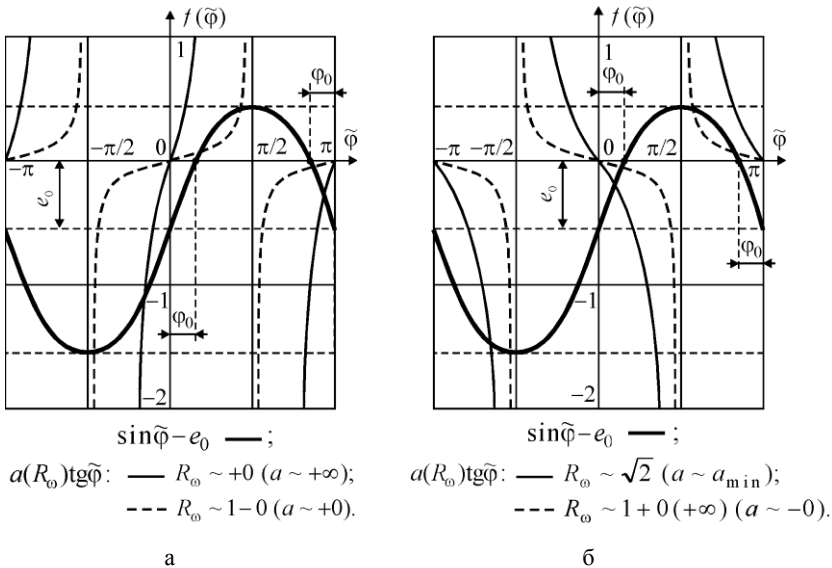


Рис. 6.4. До визначення побічних рухів при  $e_0 < 1$

З рисунка видно, що при  $R_{\omega} \rightarrow +0$  ( $a \rightarrow +\infty$ ) у системи тільки два істотно відмінних усталених рухи:

- $\tilde{\varphi}_{11} \sim -0$ , центр мас КВ починає відхилятися у важкий бік ротора і знаходиться під точкою підвісу;
- $\tilde{\varphi}_{12} \sim \pi - 0$ , центр мас КВ починає відхилятися в легкий бік ротора і знаходиться над точкою підвісу.

Зі збільшенням  $R_{\omega}$  параметр  $a$  зменшується, і в системі з'являються ще два усталених рухи. З рис. 6.4, а видно, що при  $R_{\omega} \rightarrow 1 - 0$  ( $a \rightarrow +0$ ) у системи чотири істотно відмінних усталених рухи:

- $\tilde{\varphi}_{11} \sim -\frac{\pi}{2} + 0$ , центр мас КВ відхилений у важкий бік ротора і знаходиться нижче точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_{12} \sim \pi - \varphi_0 + 0$ , КВ зрівноважує ротор і його центр мас знаходиться вище точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_{13} \sim \varphi_0 + 0$ , КВ зрівноважує ротор і його центр мас знаходиться нижче точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_{14} \sim \frac{\pi}{2} - 0$ , центр мас КВ відхилений у легкий бік ротора і знаходиться нижче точки підвісу.

На рис. 6.4, б показаний графік функції  $\sin \tilde{\varphi} - e_0$  - товста лінія, і графіки функції  $a \operatorname{tg} \tilde{\varphi}$  при  $R_{\omega} \rightarrow 1 + 0$ ,  $R_{\omega} \rightarrow +\infty$  - тонкий пунктир, і при  $R_{\omega} \sim \sqrt{2}$  - тонка суцільна лінія. У випадках  $R_{\omega} \rightarrow 1 + 0$ ,  $R_{\omega} \rightarrow +\infty$  параметр  $a \rightarrow -0$  і у системі існують чотири істотно відмінних усталених рухи:

- $\tilde{\varphi}_{11} \sim -\frac{\pi}{2} - 0$ , центр мас КВ відхилений у важкий бік ротора і знаходиться вище точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_{12} \sim \pi - \varphi_0 - 0$ , КВ зрівноважує ротор і його центр мас знаходиться вище точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_{13} \sim \varphi_0 - 0$ , КВ зрівноважує ротор і його центр мас знаходиться нижче точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_{14} \sim \frac{\pi}{2} + 0$ , центр мас КВ відхилений у легкий бік ротора і знаходиться вище точки підвісу.

При  $R_{\omega} \sim \sqrt{2}$  параметр  $a$  приймає найменше значення  $-R_g^2 / 4R_m$ . З рис. 6.4, б видно, що при невеликих дисбалансах ( $e_0 \sim 0$ ) у системі на зарезонансних швидкостях завжди є чотири істотно відмінних усталених



рухи - аналоги усталених рухів попереднього випадку. При великих дисбалансах ( $e_0 > 1$ ), коли  $R_\omega \sim \sqrt{2}$  у системі є тільки два істотно відмінних усталених рухи, що є аналогами рухів  $\tilde{\varphi}_{11}$ ,  $\tilde{\varphi}_{13}$  попереднього випадку.

Знайдені усталені рухи пронумеруємо у такий спосіб:

- $\tilde{\varphi}_1 \sim \varphi_0$  - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ знаходиться нижче точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_2 \sim \pi - \varphi_0$  - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ знаходиться вище точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_3 \sim -\pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений у важкий бік ротора;
- $\tilde{\varphi}_4 \sim \pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений у легкий бік ротора.

Знайдемо швидкості обертання ротора, при яких у системі з'являються або зникають усталені рухи. З рис. 6.4 видно, що в критичних випадках у кривих  $\sin \tilde{\varphi} - e_0$ ,  $\text{atg} \tilde{\varphi}$  з'являються спільні дотичні. Це дає умову

$$\cos \tilde{\varphi} = a / \cos^2 \tilde{\varphi}. \quad (6.58)$$

Підставляючи в рівнянні (6.57) у  $\text{tg} \tilde{\varphi}$  функцію  $\cos \tilde{\varphi}$  з (6.58) і перетворюючи, знаходимо наступне рівняння для визначення  $\tilde{\varphi}$

$$\sin^3 \tilde{\varphi} = e_0. \quad (6.59)$$

Істотно відмінні дійсні корені цього рівняння такі

$$\varphi_{k1} = \arcsin e_0^{1/3}, \quad \varphi_{k2} = \pi - \arcsin e_0^{1/3}. \quad (6.60)$$

Враховуючи, що  $\cos \varphi_{k1} > 0$ ,  $\cos \varphi_{k2} = -\cos \varphi_{k1}$ , з рівняння (6.58) знаходимо наступне рівняння для визначення кутових швидкостей

$$\pm R_m R_\omega^4 \cos^3 \varphi_{k1} + R_g^2 R_\omega^2 - R_g^2 = 0. \quad (6.61)$$

Не обмежуючи загальності, будемо шукати додатні дійсні корені. Ними можуть бути тільки корені

$$R_{\omega 1} = \sqrt{\frac{\sqrt{R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1}} - R_g^2}{2R_m \cos^3 \varphi_{k1}}}, \quad R_{\omega 2} = \sqrt{\frac{R_g^2 - \sqrt{R_g^4 - 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1}}}{2R_m \cos^3 \varphi_{k1}}},$$

$$R_{\omega 3} = \sqrt{\frac{R_g^2 + \sqrt{R_g^4 - 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1}}}{2R_m \cos^3 \varphi_{k1}}}. \quad (6.62)$$

Доведемо, що якщо всі корені дійсні, то

$$0 < R_{\omega 1} < 1 < R_{\omega 2} < R_{\omega 3}. \quad (6.63)$$

Доведемо нерівність для кореня  $R_{\omega 1}$ . Зауважимо, що цей корінь завжди додатній. Для доведення розглянемо низку нерівностей

$$\begin{aligned} R_{\omega 1} < 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1}} - R_g^2}{2R_m \cos^3 \varphi_{k1}} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1}} < R_g^2 + 2R_m \cos^3 \varphi_{k1} \Leftrightarrow \\ &R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1} < R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1} + 4R_m^2 \cos^6 \varphi_{k1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4R_m^2 \cos^6 \varphi_{k1} > 0. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Аналогічно доводяться інші нерівності. Таким чином, у системи чотири усталені рухи в інтервалах кутових швидкостей

$$(R_{\omega 1}, R_{\omega 2}) \cup (R_{\omega 3}, +\infty). \quad (6.65)$$

Кутові швидкості  $R_{\omega 2/3}$  існують при виконанні умови  $R_g^4 - 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1} > 0$ , або  $R_g^2 > 4R_m \cos^3 \varphi_{k1}$ . Звідси, з врахуванням (6.60) знаходимо

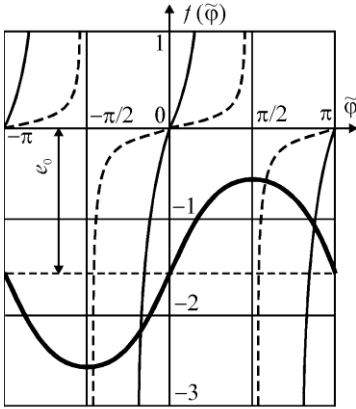
$$R_g^2 > 4R_m (1 - e_0^{2/3})^{3/2}. \quad (6.66)$$

Таким чином, у системи не більше чотирьох різних усталених рухів - два основних і два побічних. Зауважимо, що при наявності сил тертя КВ прямує до зазначених вище граничних положень тільки коли  $R_{\omega} \gg 1$  - для ротора, що швидко обертається. Крім того, при наявності сил тертя вектор відхилення осі вала знаходиться не на одній лінії з вектором дисбалансу і тому КВ відхиляється не строго в напрямку легкого або важкого боку ротора. Слід зазначити, що наявність зовнішніх сил тертя приводить до того, що в деякому околі резонансної кутової швидкості не існують побічні рухи.

На рис. 6.3 показані граничні положення КВ у різних усталених рухах. Оскільки реальні положення КВ можуть сильно відрізнятись від граничних, усталені рухи будемо розрізняти по тому, аналогом яких граничних положень вони є.

Істотно, що в 3-у і 4-у побічних рухах ротора:

- на дорезонансних швидкостях ( $|R_{\omega}| < 1$ )  $\tilde{\varphi}_3 < \pi/2$ ,  $\tilde{\varphi}_4 < \pi/2$  - центр мас КВ знаходиться нижче точки підвісу;
- на зарезонансних швидкостях ( $|R_{\omega}| > 1$ )  $\tilde{\varphi}_3 > \pi/2$ ,  $\tilde{\varphi}_4 > \pi/2$  - центр мас КВ знаходиться вище точки підвісу.

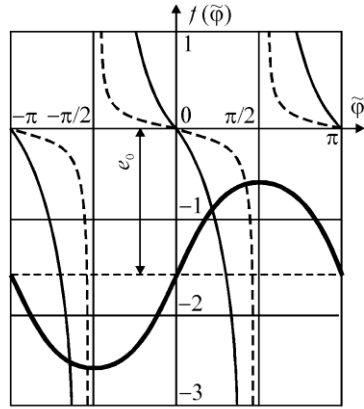


$$\sin \tilde{\varphi} - e_0 \text{ —};$$

$$a(R_\omega) \operatorname{tg} \tilde{\varphi}: \text{ — } R_\omega \sim +0 \ (a \sim +\infty);$$

$$\text{--- } R_\omega \sim 1-0 \ (a \sim +0).$$

а



$$\sin \tilde{\varphi} - e_0 \text{ —};$$

$$a(R_\omega) \operatorname{tg} \tilde{\varphi}: \text{ — } R_\omega \sim \sqrt{2} \ (a \sim a_{\min});$$

$$\text{--- } R_\omega \sim 1+0 \ (+\infty) \ (a \sim -0).$$

б

Рис. 6.5. До визначення побічних рухів при  $e_0 > 1$

**2.** Розглянемо випадок дисбалансів, які АБП не може зрівноважити ( $e_0 > 1$ ). На рис. 6.5 зображені графіки відповідних функцій. З рисунка видно, що система має тільки два істотно відмінних усталених рухи:  $\tilde{\varphi}_1$  - основний, в якому КВ відхилений у легкий бік ротора;  $\tilde{\varphi}_2$  - побічний, в якому КВ відхилений у важкий бік ротора, причому:

- на дорезонансних швидкостях ( $|R_\omega| < 1$ )  $\tilde{\varphi}_1 > \pi/2$ ,  $|\tilde{\varphi}_2| < \pi/2$  - у основному русі центр мас КВ над точкою підвісу, а у побічному - під;
- на зарезонансних швидкостях ( $|R_\omega| > 1$ )  $\tilde{\varphi}_1 < \pi/2$ ,  $|\tilde{\varphi}_2| > \pi/2$  - у основному русі центр мас КВ під точкою підвісу, а у побічному - над.

#### 6.2.4. Рухи першої групи при врахуванні сил ваги і сил зовнішнього опору

Розв'язуємо рівняння (6.35) наближено у низці граничних випадків.

**1.** Випадок ротора, який швидко обертається ( $R_\omega \gg 1$ ). Введемо малий параметр

$$v = 1/R_\omega, \quad v \ll 1. \quad (6.67)$$

і подамо рівняння (6.35) у вигляді

$$(1-u^2) \left\{ \left[ u + (1-v^2)v^2 \frac{R_g^2}{R_m} \right]^2 + \frac{H^2 R_g^4}{R_m^2} v^6 \right\} = e_0^2 u^2. \quad (6.68)$$

При  $v=0$  рівняння (6.68) приймає вигляд

$$(1-u^2)u^2 = e_0^2 u^2.$$

У випадку, коли балансувальної ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора, поліном (6.68) має найбільшу кількість - чотири розв'язки

$$u_{1/2} = 0, \quad u_{3/4} = \pm \sqrt{1-e_0^2}. \quad (6.69)$$

Враховуючи, що  $1-e_0^2 = \sin^2 \varphi_0$  знаходимо, що їм відповідають такі істотно відмінні значення кута  $\varphi$ :

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0, \quad \tilde{\varphi}_2 = \pi - \varphi_0, \quad \tilde{\varphi}_3 = \pi/2, \quad \tilde{\varphi}_4 = -\pi/2. \quad (6.70)$$

Ці ж розв'язки раніше отримані при нехтуванні впливом сил ваги і зовнішніх сил опору ( $R_g=0, H=0$ ).

Рухи, що відповідають розв'язкам (6.70), мають такі властивості.

У випадку, коли  $e_0 < 1$ :

- $\tilde{\varphi}_1 \sim \varphi_0$  - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ нижче точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_2 \sim \pi - \varphi_0$  - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ вище точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_3 \sim \pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений у важкий бік ротора;
- $\tilde{\varphi}_4 \sim -\pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений в легкий бік ротора.

У випадку, коли  $e_0 \geq 1$  (у полінома тільки два розв'язки):

- $\tilde{\varphi}_1 \sim \pi/2$  - основний рух, у якому КВ відхилений в легкий бік ротора;
- $\tilde{\varphi}_2 \sim -\pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений у важкий бік ротора.

Знайдемо для цих рухів розкладання за степенями малого параметра. Використовуючи рівняння (6.68), знаходимо такі його розв'язки у вигляді розкладань.

У випадку, коли  $e_0 < 1$ :

$$\begin{aligned} \exists \tilde{\varphi}_1 : \cos \tilde{\varphi}_1 &= \cos \varphi_0 + \frac{R_g^2 v^2}{R_m \cos^2 \varphi_0} + \dots, & \tilde{\varphi}_2 : \cos \tilde{\varphi}_2 &= -\cos \varphi_0 + \frac{R_g^2 v^2}{R_m \cos^2 \varphi_0} + \dots, \\ \tilde{\varphi}_3 : \cos \tilde{\varphi}_3 &= -\frac{R_g^2 v^2}{R_m (1 + \sin \varphi_0)} + \dots, & \tilde{\varphi}_4 : \cos \tilde{\varphi}_4 &= -\frac{R_g^2 v^2}{R_m (1 - \sin \varphi_0)} + \dots; \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = \arcsin e_0 \quad (\sin \varphi_0 = e_0, \quad \cos \varphi_0 = \sqrt{1-e_0^2}), \quad (6.71)$$

причому  $\tilde{\varphi}_3 > \pi/2$ ,  $\tilde{\varphi}_4 > \pi/2$  - центр мас КВ знаходиться вище точки підвісу.

У випадку, коли  $e_0 \geq 1$ :

$$\exists \tilde{\varphi}_1: \cos \tilde{\varphi}_1 = \frac{R_g^2 v^2}{R_m(e_0 - 1)} + \dots, \quad \tilde{\varphi}_2: \cos \tilde{\varphi}_2 = -\frac{R_g^2 v^2}{R_m(e_0 + 1)} + \dots, \quad (6.72)$$

причому  $\tilde{\varphi}_1 < \pi/2$ ,  $|\tilde{\varphi}_2| > \pi/2$  - у основному русі центр мас КВ під точкою підвісу, а у побічному - над.

2. Випадок обертання ротора з навколо резонансною кутовою швидкістю ( $R_\omega^2 \sim 1$ ). При обертанні ротора з резонансною частотою рівняння (6.68) приймає вигляд

$$(1 - u^2)(R_m^2 u^2 / R_g^4 + H^2) = R_m^2 u^2 e_0^2 / R_g^4,$$

або, після перетворень

$$x^2 - (1 - e_0^2 - b^2)x - b^2 = 0, \quad b^2 = \frac{H^2 R_g^4}{R_m^2}, \quad x = u^2. \quad (6.73)$$

Єдиний додатній корінь полінома (6.73)

$$x = \frac{1 - e_0^2 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{(1 - e_0^2 - b^2)^2}{4} + b^2}. \quad (6.74)$$

Доведемо, що  $x \leq 1$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - e_0^2 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{(1 - e_0^2 - b^2)^2}{4} + b^2} \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\sqrt{\frac{(1 - e_0^2 - b^2)^2}{4} + b^2} \leq 1 - \frac{1 - e_0^2 - b^2}{2} = \frac{1 + e_0^2 + b^2}{2} \Leftrightarrow \\ &\frac{(1 - e_0^2 - b^2)^2}{4} + b^2 \leq \frac{(1 + e_0^2 + b^2)^2}{4} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$1 - 2(e_0^2 + b^2) + (e_0^2 + b^2)^2 + 4b^2 \leq 1 + 2(e_0^2 + b^2) + (e_0^2 + b^2)^2 \Leftrightarrow 0 \leq 4e_0^2.$$

Таким чином,  $\forall e_0 \neq 0 \quad 0 < x < 1$ , і  $x = 1$ , коли  $e_0 = 0$ .

Розглянемо випадок, коли відсутнє зовнішнє тертя  $H = 0$  ( $b = 0$ ).

Тоді

$$x = \begin{cases} 1 - e_0^2, & e_0 < 1; \\ 0, & e_0 \geq 1. \end{cases} \quad \sin^2 \tilde{\varphi} = 1 - x = \begin{cases} e_0^2, & e_0 < 1; \\ 1, & e_0 \geq 1. \end{cases}$$

Звідки знаходимо

$$\sin \tilde{\varphi} = \begin{cases} \pm e_0, & e_0 < 1; \\ \pm 1, & e_0 \geq 1. \end{cases} \quad (6.75)$$

Істотно відмінні розв'язки цього рівняння:

- для випадку  $e_0 < 1$

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0, \quad \tilde{\varphi}_2 = \pi - \varphi_0, \quad \varphi_0 = \arcsin e_0;$$

- для випадку  $e_0 \geq 1$

$$\tilde{\varphi}_{1/2} = \pm \pi/2. \quad (6.76)$$

Із (6.76) випливає, що для випадку  $e_0 < 1$

$$\cos \tilde{\varphi}_1 = \cos \varphi_0, \quad \cos \tilde{\varphi}_2 = -\cos \varphi_0, \quad \text{tg} \tilde{\varphi}_1 > 0, \quad \text{tg} \tilde{\varphi}_2 < 0.$$

Підставляючи це в формули (6.37), коли  $R_\omega = \pm 1$ , отримуємо

$$\sin \tilde{\psi}_{1,2} = 1, \quad \cos \tilde{\psi}_{1,2} = 0. \quad (6.77)$$

З рис. 6.3 видно, що в обох рухах КВ повертається навколо осі  $u'_1$  проти ходу стрілки годинника і тому КВ відхиляється у легкий бік ротора. З величини кутів  $\tilde{\varphi}_{1,2}$  випливає, що ротор зрівноважений.

Аналогічно встановлюємо, що у випадку  $e_0 \geq 1$  КВ максимально відхилений (на кут  $\pi/2$ ) у легкий бік ротора, чим максимально його зрівноважує, або у важкий бік, чим максимально збільшує дисбаланс.

Таким чином, в околі резонансної кутової швидкості обертання ротора при дисбалансах, які може зрівноважити АБП ( $e_0 < 1$ ), існують тільки ті аналоги основних рухів – у яких ротор зрівноважений, а при дисбалансах, які не може зрівноважити АБП ( $e_0 \geq 1$ ) - існують основний і побічний рухи.

**3.** Випадок малих кутових швидкостей обертання ротора ( $R_\omega \sim 0$ ).

При  $R_\omega = 0$  рівняння (6.35) приймає вигляд  $u^2 - 1 = 0$ . Звідки знаходимо  $u_{1,2} = \pm 1$ . З цього випливає, що у рівняння (6.35) в околі  $R_\omega = 0$  не більше двох коренів, менших за модулем 1 і два корені набагато більші за 1. Оскільки  $\sin \varphi_{1,2} \sim 0$ , то будемо наближено розв'язувати рівняння (6.35) відносно  $\sin \varphi$ . Позначимо

$$v = \sin \varphi = \pm \sqrt{1 - u^2}. \quad (6.78)$$

Тоді рівняння (6.35) приводиться до виду

$$v^2 \left[ \left( R_\omega^2 - 1 \pm \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} \sqrt{1 - v^2} \right)^2 + H^2 R_\omega^2 \right] = \frac{R_m^2 R_\omega^8}{R_g^4} e_0^2 (1 - v^2). \quad (6.79)$$

Шукаємо  $v$  у вигляді

$$v = v^{(4)} R_\omega^4 + v^{(6)} R_\omega^6 + \dots \quad (6.80)$$

Підставляємо (6.80) в (6.79):

$$(v^{(4)2} R_{\omega}^8 + 2v^{(4)}v^{(6)} R_{\omega}^{10} + \dots)(1 - 2R_{\omega}^2 + H^2 R_{\omega}^2 + \dots) = \frac{R_m^2 R_{\omega}^8 \tilde{\epsilon}_0^2}{R_g^4} + \dots.$$

Збираючи коефіцієнти при однакових степенях  $R_{\omega}$ , отримуємо наступну систему алгебраїчних рівнянь для визначення  $v^{(4)}$ ,  $v^{(6)}$ :

$$\begin{aligned} R_{\omega}^8 : v^{(4)2} &= R_m^2 \tilde{\epsilon}_0^2 / R_g^4, \\ R_{\omega}^{10} : 2v^{(4)}v^{(6)} - (2 - H^2)v^{(4)2} &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

З цієї системи знаходимо

$$v_{1,2}^{(4)} = \pm R_m \tilde{\epsilon}_0 / R_g^2, \quad v_{1,2}^{(6)} = (1 - H^2/2)v_{1,2}^2, \dots$$

Тому

$$v_{1,2} = \sin \tilde{\varphi}_{1,2} \approx \pm \frac{R_m \tilde{\epsilon}_0 R_{\omega}^4}{R_g^2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{H^2}{2} \right) R_{\omega}^2 \right], \quad u_{1,2} = \cos \varphi_{1,2} \approx \pm 1. \quad (6.81)$$

Зауважимо, що зміна знаку перед  $\sin \tilde{\varphi}$  не приводить до нового усталеного руху, оскільки одночасно змінюється знак перед  $\sin \tilde{\psi}$ ,  $\cos \tilde{\psi}$  і тому КВ повертається на кут  $-\tilde{\varphi}$  навколо тієї ж осі, але в протилежний бік. У силу мализни кута  $\varphi$ , отримуємо наступні вирази для кутів  $\tilde{\varphi}$  в усталених рухах

$$\tilde{\varphi}_1 \approx \frac{R_m \tilde{\epsilon}_0 R_{\omega}^4}{R_g^2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{H^2}{2} \right) R_{\omega}^2 \right], \quad \tilde{\varphi}_2 \approx \pi - \frac{R_m \tilde{\epsilon}_0 R_{\omega}^4}{R_g^2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{H^2}{2} \right) R_{\omega}^2 \right]. \quad (6.82)$$

Для подальшого уточнення кореня  $\tilde{\varphi}_1$  треба використовувати рівняння (6.79) із знаком “+” перед  $\sqrt{1-v^2}$ , а для уточнення  $\tilde{\varphi}_2$  - із знаком “-“. З (6.37) і (6.82) знаходимо, що  $\text{tg} \tilde{\varphi}_1 > 0$ ,  $\text{tg} \tilde{\varphi}_2 < 0$ ,  $u_1 > 0$ ,  $u_2 < 0$ . Враховуючи, що такі ж самі знаки, що і перед  $\text{tg} \tilde{\varphi}$ , треба брати в формулах (6.37) перед  $\sin \tilde{\psi}$  і  $\cos \tilde{\psi}$ , знаходимо

$$\begin{aligned} \sin \tilde{\psi}_1 &\approx \frac{R_{\omega}^2 - 1}{\sqrt{(R_{\omega}^2 - 1)^2 + H^2 R_{\omega}^2}}, & \cos \tilde{\psi}_1 &\approx -\frac{H R_{\omega}}{\sqrt{(R_{\omega}^2 - 1)^2 + H^2 R_{\omega}^2}}, \\ \sin \tilde{\psi}_2 &\approx -\frac{R_{\omega}^2 - 1}{\sqrt{(R_{\omega}^2 - 1)^2 + H^2 R_{\omega}^2}}, & \cos \tilde{\psi}_2 &\approx \frac{H R_{\omega}}{\sqrt{(R_{\omega}^2 - 1)^2 + H^2 R_{\omega}^2}}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Коли  $R_{\omega} = 0$

$$\sin \tilde{\psi}_1 = -1, \quad \cos \tilde{\psi}_1 = 0, \quad \sin \tilde{\psi}_2 = 1, \quad \cos \tilde{\psi}_2 = 0. \quad (6.84)$$

У першому русі КВ починає відхилятися у важкий бік ротора, а у другому русі – у легкий. При цьому центр мас КВ у першому русі нижче точки підвісу, а у другому – вище.

Надалі усталені рухи будемо розрізняти за граничними положеннями КВ відносно ротора і остаточно пронумеруємо їх у такий спосіб.

Для випадку  $e_0 < 1$  (рис. 6.6):

- $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0$  - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ нижче точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_2 = \pi - \varphi_0$  - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ вище точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_3 = -\pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений у важкий бік ротора;
- $\tilde{\varphi}_4 = \pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений в легкий бік ротора;
- $\tilde{\varphi}_5 = 0$  - побічний рух, у якому центр мас КВ під точкою підвісу;
- $\tilde{\varphi}_6 = \pi$  - побічний рух, у якому центр мас КВ над точкою підвісу.

Для випадку  $e_0 \geq 1$  (рис. 6.7):

- $\tilde{\varphi}_1 = \pi/2$  - основний рух, у якому КВ відхилений у легкий бік ротора;
- $\tilde{\varphi}_2 = -\pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений у важкий бік ротора;
- $\tilde{\varphi}_3 = 0$  - побічний рух, у якому центр мас КВ під точкою підвісу;
- $\tilde{\varphi}_4 = \pi$  - побічний рух, у якому центр мас КВ над точкою підвісу.

Істотно, що при дисбалансах, які може зрівноважити АБП ( $e_0 < 1$ ) в 3-у і 4-у побічних рухах ротора:

- на дорезонансних швидкостях ( $|R_{\omega}| < 1$ )  $\tilde{\varphi}_3 < \pi/2$ ,  $\tilde{\varphi}_4 < \pi/2$  - центр мас КВ знаходиться нижче точки підвісу;
- на зарезонансних швидкостях ( $|R_{\omega}| > 1$ )  $\tilde{\varphi}_3 > \pi/2$ ,  $\tilde{\varphi}_4 > \pi/2$  - центр мас КВ знаходиться вище точки підвісу.

Істотно, що при дисбалансах, які АБП не може зрівноважити ( $e_0 < 1$ ) в 1-у основному і 2-у побічному рухах ротора:

- на дорезонансних швидкостях ( $|R_{\omega}| < 1$ )  $\tilde{\varphi}_1 > \pi/2$ ,  $|\tilde{\varphi}_2| < \pi/2$  - у основному русі центр мас КВ над точкою підвісу, а у побічному - під;
- на зарезонансних швидкостях ( $|R_{\omega}| > 1$ )  $\tilde{\varphi}_1 < \pi/2$ ,  $|\tilde{\varphi}_2| > \pi/2$  - у основному русі центр мас КВ під точкою підвісу, а у побічному - над.

Рухи  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4$  ( $e_0 < 1$ ) і рухи  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$  ( $e_0 > 1$ ) називатимемо рухами першої групи. Рухи  $\tilde{\varphi}_5, \tilde{\varphi}_6$  ( $e_0 < 1$ ) і рухи  $\tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4$  ( $e_0 > 1$ ) називатимемо рухами другої групи.



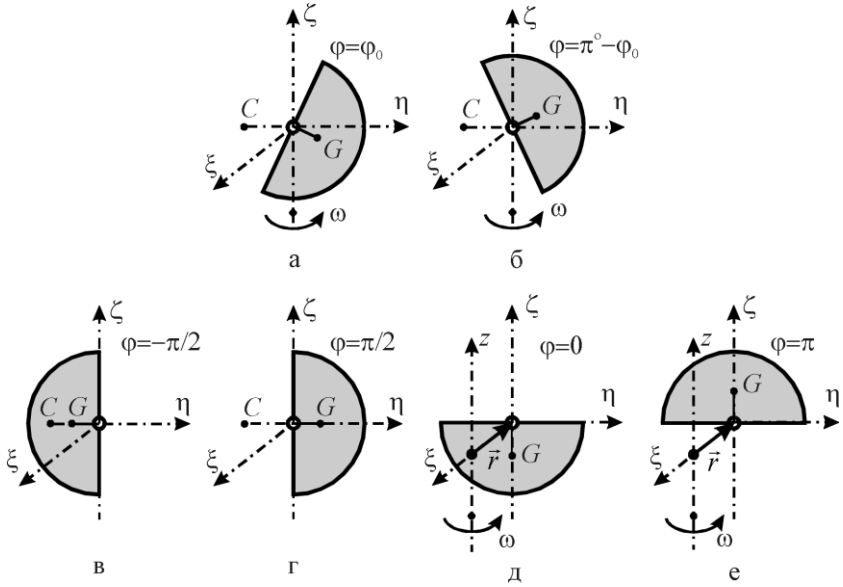


Рис. 6.6. Граничні положення КВ в усталених рухах для випадку  $e_0 < 1$

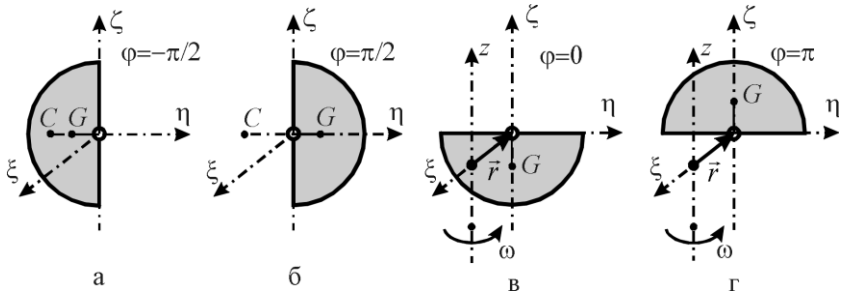


Рис. 6.7. Граничні положення КВ в усталених рухах для випадку  $e_0 > 1$

**Необхідною умовою настання автобалансування** є стійкість для будь-яких дисбалансів на робочому інтервалі кутових швидкостей обертання ротора принаймні одного основного руху і нестійкість, або не існування – усіх побічних.

## 6.3. Дослідження стійкості усталених рухів

### 6.3.1. Стійкість рухів першої групи

**1. Одержання характеристичного рівняння.** Для усталених рухів першої групи введемо збурений рух

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \quad \xi = -\frac{R_g^2}{R_\omega^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi} + u, \quad \eta = \frac{R_g^2}{R_\omega^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi} + v, \quad (6.85)$$

де  $\alpha, \beta, u, v$  - відхилення від незбуреного руху. Тоді рівняння першого наближення приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} l_1 &= \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} + R_g^2 \frac{1}{\cos \tilde{\varphi}} \alpha - \\ &\quad - [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \tilde{\psi} - (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \tilde{\psi}] \cos \tilde{\varphi} = 0, \\ l_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} \beta - \\ &\quad - [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \cos \tilde{\psi} + (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \sin \tilde{\psi}] \sin \tilde{\varphi} = 0, \\ l_3 &= \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u - \\ &\quad - R_m \{[(\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) \cos \tilde{\varphi} - 2R_\omega \dot{\beta} \sin \tilde{\varphi}] \sin \tilde{\psi} + \\ &\quad + [(\ddot{\beta} - R_\omega^2 \beta) \sin \tilde{\varphi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\varphi}] \cos \tilde{\psi}\} = 0, \\ l_4 &= \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v + \\ &\quad + R_m \{[(\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) \cos \tilde{\varphi} - 2R_\omega \dot{\beta} \sin \tilde{\varphi}] \cos \tilde{\psi} - \\ &\quad - [(\ddot{\beta} - R_\omega^2 \beta) \sin \tilde{\varphi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\varphi}] \sin \tilde{\psi}\} = 0. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Уводимо нові комплексні змінні

$$X = (u - iv)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad Y = \bar{X}, \quad \Phi = i(\alpha \cos \tilde{\varphi} + i\beta \sin \tilde{\varphi}), \quad F = \bar{\Phi}. \quad (6.87)$$

Перетворюємо ліві частини рівнянь (6.86) за алгоритмами

$$\begin{aligned} L_1 &= (l_3 + il_4)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad L_2 = \bar{L}_1, \quad L_3 = 2i(p_1 + ip_2)e^{i\tilde{\psi}}, \quad L_4 = \bar{L}_3, \\ p_1 &= l_1 \frac{\cos \tilde{\psi}}{\cos \tilde{\varphi}} + l_2 \frac{\sin \tilde{\psi}}{\sin \tilde{\varphi}}, \quad p_2 = -l_1 \frac{\sin \tilde{\psi}}{\cos \tilde{\varphi}} + l_2 \frac{\cos \tilde{\psi}}{\sin \tilde{\varphi}}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Тоді рівняння першого наближення приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} L_1 &= \ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + H(\dot{X} + iR_\omega X) + X + R_m(\ddot{\Phi} + 2iR_\omega \dot{\Phi} - R_\omega^2 \Phi) = 0, \\ L_2 &= \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y + H(\dot{Y} - iR_\omega Y) + Y + R_m(\ddot{F} - 2iR_\omega \dot{F} - R_\omega^2 F) = 0, \\ L_3 &= 2(\ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \ddot{\Phi} + h_1 \dot{\Phi} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \Phi \right) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \left[ (\ddot{\Phi} + h_2 \dot{\Phi}) R_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} \Phi \right] \frac{1}{\sin^2 \tilde{\varphi}} - \\
& - \left( \ddot{F} + h_1 \dot{F} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} F \right) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \left[ (\ddot{F} + h_2 \dot{F}) R_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} F \right] \frac{1}{\sin^2 \tilde{\varphi}} = 0, \\
L_4 = & 2(\ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y) \\
& - \left( \ddot{\Phi} + h_1 \dot{\Phi} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \Phi \right) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \left[ (\ddot{\Phi} + h_2 \dot{\Phi}) R_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} \Phi \right] \frac{1}{\sin^2 \tilde{\varphi}} + \\
& + \left( \ddot{F} + h_1 \dot{F} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} F \right) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \left[ (\ddot{F} + h_2 \dot{F}) R_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} F \right] \frac{1}{\sin^2 \tilde{\varphi}} = 0. \quad (6.89)
\end{aligned}$$

Уведемо коефіцієнти

$$\begin{aligned}
a_{11} = & (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \\
a_{33} = & \left[ (\lambda^2 + h_2 \lambda) R_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} \right] \frac{1}{\sin^2 \tilde{\varphi}}, \quad a_{44} = \left( \lambda^2 + h_1 \lambda + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \right) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}}. \quad (6.90)
\end{aligned}$$

Тоді характеристичне рівняння прийме вигляд

$$\begin{aligned}
D(\lambda) = & \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & R_m a_{13} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{11} & 0 & R_m \bar{a}_{13} \\ 2a_{13} & 0 & a_{33} + a_{44} & a_{33} - a_{44} \\ 0 & 2\bar{a}_{13} & a_{33} - a_{44} & a_{33} + a_{44} \end{vmatrix} = \\
= & 4a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} - 2R_m (a_{33} + a_{44}) (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) + 4R_m^2 a_{13}^2 \bar{a}_{13}^2 = 0, \quad (6.91)
\end{aligned}$$

Тут знак комплексного спряження над  $a_{ij}$  до  $\lambda$  не відноситься.

**2. Стійкість усталених рухів у випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора:**

$$R_m \ll 1. \quad (6.92)$$

У нульовому наближенні характеристичне рівняння (6.91) приймає вигляд

$$4a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} = 0. \quad (6.93)$$

Його корені

$$\lambda_0^{(1/2)} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega, \quad \lambda_0^{(3/4)} = -\frac{H}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega,$$

$$\lambda_0^{(5/6)} = -\frac{h_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}}}, \quad \lambda_0^{(7/8)} = -\frac{h_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - \frac{R_g^2 \sin^2 \tilde{\varphi}}{R_p^2 \cos \tilde{\varphi}}}. \quad (6.94)$$

З (6.94) видно, що в нульовому наближенні стійкість або нестійкість руху визначають корені 5-8. Вони будуть мати від'ємні дійсні частини, якщо

$$\cos \tilde{\varphi} > 0, \quad |\tilde{\varphi}| < \pi/2. \quad (6.95)$$

З цього випливає, що асимптотично стійкими можуть бути тільки ті усталені рухи, у яких центр мас КВ нижче точки підвісу.

З врахуванням властивостей рухів першої групи робимо наступні висновки про їх стійкість у випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора ( $R_m \ll 1$ ).

1) Якщо ємності КВ вистачає для зрівноваження ротора ( $e_0 < 1$ ):

- на малих швидкостях обертання ротора ( $R_\omega \sim 0$ ) єдиний асимптотично стійкий - побічний рух  $\tilde{\varphi}_3$ , у якому КВ відхилений в більш важкий бік ротора;
- на дорезонансних швидкостях із наближенням швидкості обертання ротора до резонансної частоти ( $R_\omega \sim 1-0$ ) асимптотично стійкий - основний рух  $\tilde{\varphi}_1$ , у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ нижче точки підвісу, і побічні рухи  $\tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4$  (за умови існування), у яких КВ відхилений в більш важкий або легкий бік ротора;
- на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_\omega > 1$ ) єдиний асимптотично стійкий - основний рух  $\tilde{\varphi}_1$ .

2) Якщо ємності КВ не вистачає для зрівноваження ротора ( $e_0 > 1$ ):

- на дорезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_\omega < 1$ ) єдиний асимптотично стійкий - побічний рух  $\tilde{\varphi}_2$ , у якому КВ відхилений в більш важкий бік ротора;
- на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_\omega > 1$ ) єдиний асимптотично стійкий - основний рух  $\tilde{\varphi}_1$ .

### 3. Випадок, коли ротор швидко обертається.

$$R_\omega \gg 1. \quad (6.96)$$

Для дослідження стійкості другої групи рухів у випадку ротора, що швидко обертається, розкладемо корені характеристичного рівняння (6.91) за степенями малого параметра  $\nu = 1/R_\omega$  у випадках, коли наближені розв'язки рівнянь усталених рухів (6.25) мають розкладання (6.71), чи (6.72).

Поділимо характеристичне рівняння (6.91) на  $R_\omega^8$ . Зробимо заміну змінної  $\lambda = R_\omega \mu$ . Позначимо  $\cos \tilde{\varphi} = u$ . Тоді характеристичне рівняння прийме вигляд

$$2b_{11}\bar{b}_{11}b_{33}b_{44} - R_m(b_{33} + b_{44})(b_{11}\bar{b}_{13}^2 + \bar{b}_{11}b_{13}^2) + 2R_m^2b_{13}^2\bar{b}_{13}^2 = 0, \quad (6.97)$$

де знак комплексного спряження до  $\mu$  не відноситься і:

$$b_{11} = (\mu + i)^2 + H\nu(\mu + i) + \nu^2, \quad b_{13} = (\mu + i)^2,$$

$$b_{33} = \left[ (\mu^2 + h_2\nu\mu)R_p^2 + R_g^2\nu^2 \frac{1-u^2}{u} \right] \frac{1}{1-u^2}, \quad b_{44} = \left( \mu^2 + h_1\nu\mu + \frac{R_g^2\nu^2}{u} \right) \frac{1}{u^2},$$

$$u = \cos \tilde{\varphi}. \quad (6.98)$$

У характеристичне рівняння (6.98) послідовно підставлялися розкладання косинусів (6.71), (6.72), які відповідають різним усталеним рухам, і потім корені одержаного рівняння розкладалися за степенями малого параметра  $\nu$  до появи ненульової дійсної частини. Потім здійснювалося повернення до змінної  $\lambda$  і параметра  $R_\omega$ . В результаті одержані такі розкладання коренів вихідного характеристичного рівняння (6.91).

Для будь-якого усталеного руху другої групи перші чотири корені визначаються розкладаннями

$$R_\omega \gg 1; \quad R_m \sim 1/R_\omega^2, \quad R_\omega \gg 1:$$

$$\lambda_{1/2} \approx -H/2 \pm i\sqrt{1-(H/2)^2} - iR_\omega, \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}. \quad (6.99)$$

Вони мають від'ємні дійсні частини, що відповідає необхідній умові асимптотичної стійкості рухів.

Для випадку, коли балансувальної ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора ( $e_0 < 1$ ) і ротор швидко обертається, параметр  $u \approx \pm\sqrt{1-e_0^2}$  - майже сталий. З врахуванням цього для основних рухів одержані такі розкладання решти коренів:

$$R_m \sim 1/R_\omega^2, \quad R_\omega \gg 1:$$

$$\lambda_{5/6} \approx -\frac{h_1}{2} \pm \left[ \left( \frac{h_1}{2} \right)^2 - u^2 \left( R_m R_\omega^2 + \frac{R_g^2}{u^3} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_{7/8} \approx -\frac{h_2}{2} \pm \left[ \left( \frac{h_2}{2} \right)^2 - \frac{(1-u^2)}{R_p^2} \left( R_m R_\omega^2 + \frac{R_g^2}{u} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.100)$$

Оскільки для першого основного руху  $0 < u < 1$ , то він асимптотично стійкий. Оскільки для другого основного руху  $-1 < u < 0$ , то він

асимптотично стійкий за виконання такої умови

$$R_m R_\omega^2 + R_g^2 / u^3 > 0, \quad (u \approx -\sqrt{1 - e_0^2}).$$

Звідки знаходимо

$$R_\omega > R_{\omega 1}^*, \quad R_{\omega 1}^* \approx \frac{R_g}{R_m^2 (1 - e_0^2)^{\frac{3}{4}}}. \quad (6.101)$$

Таким чином, у другого основного руху існує критична швидкість  $R_{\omega 1}^*$ , при перевищенні якої рух із нестійкого стає асимптотично стійким. Зауважимо, що цю швидкість дозволило виявити таке співвідношення між малістю параметрів  $R_m \sim 1/R_\omega^2$ ,  $R_\omega \gg 1$ . При інших співвідношеннях між параметрами розкладання коренів дозволяють заключити, що рух  $\tilde{\varphi}_2$ ,  $e_0 < 1$  стійкий, чи нестійкий, але не дозволяють визначити критичну швидкість.

Для побічного руху  $\tilde{\varphi}_3$ ,  $e_0 < 1$ , або для побічного руху  $\tilde{\varphi}_2$ ,  $e_0 > 1$  розкладання коренів мають вигляд:

$$R_\omega \gg 1: \lambda_{5/6} = \pm \sqrt{R_m(1 + e_0)}, \quad \lambda_{7/8} = \pm \sqrt{\frac{R_m e_0}{R_p^2 - R_m}}. \quad (6.102)$$

Із додатності коренів  $\lambda_{5/7}$  впливає, що ці рухи нестійкі.

Для побічного руху  $\tilde{\varphi}_4$ ,  $e_0 < 1$  розкладання коренів мають вигляд:

$$R_\omega \gg 1: \\ \lambda_{5/6} \approx \pm R_\omega \sqrt{R_m(1 - e_0)}, \quad \lambda_{7/8} \approx -\frac{h_2 R_p^2 + H R_m}{2(R_p^2 - R_m)} \pm i R_\omega \sqrt{\frac{R_m e_0}{R_p^2 - R_m}}. \quad (6.103)$$

Із додатності кореня  $\lambda_5$  впливає, що побічний рух  $\tilde{\varphi}_4$ ,  $e_0 < 1$  нестійкий.

Для основного руху  $\tilde{\varphi}_1$ ,  $e_0 > 1$  розкладання коренів мають вигляд:

$$R_\omega \gg 1: \\ \lambda_{5/6} \approx -\frac{h_1}{2} \pm i R_\omega \sqrt{R_m(e_0 - 1)}, \quad \lambda_{7/8} \approx -\frac{h_2 R_p^2 + H R_m}{2(R_p^2 - R_m)} \pm i R_\omega \sqrt{\frac{R_m e_0}{R_p^2 - R_m}}. \quad (6.104)$$

З розкладань впливає, що оскільки  $R_p^2 > R_m$ , то основний рух  $\tilde{\varphi}_1$ ,  $e_0 > 1$  - асимптотично стійкий.

Остаточо можна зробити наступні висновки про стійкість рухів першої групи у випадку, коли ротор швидко обертається:

1) основний рух  $\tilde{\varphi}_1$ ,  $e_0 < 1$ ;  $\tilde{\varphi}_1$ ,  $e_0 > 1$  - асимптотично стійкий;

- 2) основний рух  $\tilde{\varphi}_2$ ,  $e_0 < 1$  асимптотично стійкий, якщо  $R_\omega > R_{\omega 1}^*$ , де  $R_{\omega 1}^*$  з (6.112), а на менших швидкостях він не стійкий;
- 3) побічні рухи  $\tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4$   $e_0 < 1$ ;  $\tilde{\varphi}_2$ ,  $e_0 > 1$  – нестійкі.

### 6.3.2. Стійкість рухів другої групи

Для усталених рухів другої групи вводимо збурений рух

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \quad \xi = \tilde{\xi} + u, \quad \eta = \tilde{\eta} + v. \quad (6.105)$$

Помітимо, що

$$\sin \tilde{\varphi} = 0, \quad \cos \tilde{\varphi} = \pm 1, \quad \sin \tilde{\psi} \approx \pm \alpha, \quad \cos \tilde{\psi} \approx \pm 1,$$

де верхній знак відповідає положенню КВ, у якому центр мас нижче точки підвісу, а нижній – навпаки. Тоді рівняння першого наближення приймуть вигляд

$$\begin{aligned} l_1 &= \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} \pm R_g^2 \alpha \pm R_\omega^2 (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) \beta \mp \\ &\mp [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \tilde{\psi} - (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \tilde{\psi}] = 0, \\ l_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_p^2 \pm R_\omega^2 (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) \alpha = 0, \\ l_3 &= \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u \mp R_m [(\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) \sin \tilde{\psi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\psi}] = 0, \\ l_4 &= \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v \pm \\ &\pm R_m [(\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) \cos \tilde{\psi} - 2R_\omega \dot{\alpha} \sin \tilde{\psi}] = 0. \end{aligned} \quad (6.106)$$

де верхній знак відповідає рухові  $\tilde{\varphi}_5$ , а нижній –  $\tilde{\varphi}_6$ . Помітимо, що

$$\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi} = (\pm) \tilde{r} = (\pm) \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \quad (6.107)$$

де  $(\pm)$  – означає невизначений знак, не зв'язаний з номером усталеного руху. Уводимо комплексні змінні

$$X = -i(u + iv)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad Y = \bar{X}. \quad (6.108)$$

Тоді система рівнянь (6.106) перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} l_1 &= \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} \pm R_g^2 \alpha \pm (\pm) \tilde{r} R_\omega^2 \beta \pm \frac{1}{2} (\ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y) = 0, \\ l_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_p^2 \pm (\pm) \tilde{r} R_\omega^2 \alpha = 0, \\ -i(l_3 + il_4)e^{-i\psi} &= \ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + H(\dot{X} + iR_\omega X) + X \pm \\ &\pm R_m (\ddot{\alpha} + 2iR_\omega \dot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) = 0, \\ i(l_3 - il_4)e^{i\psi} &= \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y + H(\dot{Y} - iR_\omega Y) + Y \pm \end{aligned}$$

$$\pm R_m (\ddot{\alpha} - 2iR_\omega \dot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) = 0. \quad (6.109)$$

Уведемо коефіцієнти

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \quad a_{33} = \lambda^2 + h_1 \lambda \pm R_g^2, \\ a_{34} = \frac{R_\omega^4 e_0}{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \quad a_{44} = (\lambda^2 + h_2 \lambda) R_p^2. \quad (6.110)$$

Тоді характеристичне рівняння прийме вид

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \pm R_m a_{13} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{11} & \pm R_m \bar{a}_{13} & 0 \\ \pm \frac{a_{13}}{2} & \pm \frac{\bar{a}_{13}}{2} & a_{33} & \pm R_m (\pm) a_{34} \\ 0 & 0 & \pm R_m (\pm) a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \\ = a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} - \frac{R_m}{2} (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) a_{44} - R_m^2 a_{11} \bar{a}_{11} a_{34}^2 = 0. \quad (6.111)$$

Тут знак комплексного спряження над  $a_{ij}$  до  $\lambda$  не відноситься.

У явному вигляді характеристичне рівняння (6.111) має такий вигляд

$$D = b_8 \lambda^8 + \dots + b_1 \lambda + b_0, \\ b_0 = -R_m^2 e_0^2 R_\omega^8 < 0, \dots, \quad b_8 = (1 - R_m) R_p^2 > 0. \quad (6.112)$$

Оскільки коефіцієнти  $b_0, b_8$  мають різні знаки, то з наслідків з теореми Вієта випливає, що рухи другої групи завжди нестійкі.

Остаточо можна зробити наступні висновки.

1) Якщо ємності КВ вистачає для зрівноваження ротора ( $e_0 < 1$ ):

- на малих швидкостях обертання ротора ( $R_\omega \sim +0$ ) єдиний асимптотично стійкий - побічний рух  $\tilde{\varphi}_3$ , у якому КВ відхилений в більш важкий бік ротора;
- на дорезонансних швидкостях із наближенням швидкості обертання ротора до резонансної частоти ( $R_\omega \sim 1-0$ ) асимптотично стійкий - основний рух  $\tilde{\varphi}_1$ , у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ нижче точки підвісу, і побічні рухи  $\tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4$  (за умови існування), у яких КВ відхилений в більш важкий або легкий бік ротора;
- на зарезонансних швидкостях обертання ротора, менших за  $R_{\omega 1}^*$  з (6.101) ( $1 < R_\omega < R_{\omega 1}^*$ ) єдиний асимптотично стійкий - основний рух  $\tilde{\varphi}_1$ , а на швидкостях, більших ( $R_\omega > R_{\omega 1}^*$ ) - два основні рухи  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ .

2) якщо ємності КВ не вистачає для зрівноваження ротора ( $e_0 > 1$ ):



- на дорезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_\omega < 1$ ) єдиний асимптотично стійкий - побічний рух  $\tilde{\varphi}_2$ , у якому КВ відхилений в більш важкий бік ротора;
- на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_\omega > 1$ ) єдиний асимптотично стійкий - основний рух  $\tilde{\varphi}_1$ .

3) Автобалансування настає на зарезонансних швидкостях обертання ротора.

#### 6.4. Дослідження ефективності зрівноваження дисбалансу

Ефективність зрівноваження ротора АБД визначена у п.6.2. Там також знайдені умови існування різних усталених рухів. В п.6.3 досліджена стійкість усталених рухів. Все це дає можливість побудувати графіки ефективності зрівноваження ротора АБД саме для тих рухів, які існуюватимуть і будуть стійкими. З формули (6.40), яка визначає ефективність зрівноваження ротора, випливає, що остання залежить від п'яти незалежних безрозмірних параметрів:

$$R_\omega, H, R_m, R_g, e_0 \quad (u = \cos \tilde{\varphi}).$$

Тому треба дослідити вплив цих параметрів на ефективність зрівноваження ротора. Для цього нижче будуються графіки ефективності  $n = n(R_\omega)$  для різних числових значень решти параметрів. Тут прийнято до уваги, що серед всіх параметрів  $R_\omega$  є визначальним, бо передбачається, що на дорезонансних швидкостях обертання ротора ( $0 < R_\omega < 1$ ) пристрій буде збільшувати відхилення вала від осі обертання, а на зарезонансних швидкостях ( $R_\omega > 1$ ) - зменшувати. Зміна решти параметрів може дещо вплинути на кількісну величину ефективності, але на якісний вигляд графіка вплинути не може.

На рис. 6.8 наведені графіки ефективності зрівноваження ротора  $n = n(R_\omega)$  (побудовані з використанням пакета прикладних програм Mathcad) при зміні різних параметрів –  $H, R_m, R_g, e_0$ . З характеру графіків можна зробити такі висновки:

1) збільшення зовнішніх сил опору  $H$ , впливу сил ваги  $R_g$  чи початкового дисбалансу  $e_0$  покращує ефективність на дорезонансних швидкостях обертання ротора і погіршує на зарезонансних;

2) збільшення маси КВ у порівнянні з масою ротора  $R_m$  погіршує ефективність зрівноваження ротора на дорезонансних швидкостях обертання ротора і покращує на зарезонансних.

$$R_m := 0.1 \quad H := 0.2 \quad R_g := 0.2 \quad e_0 := 0.5$$

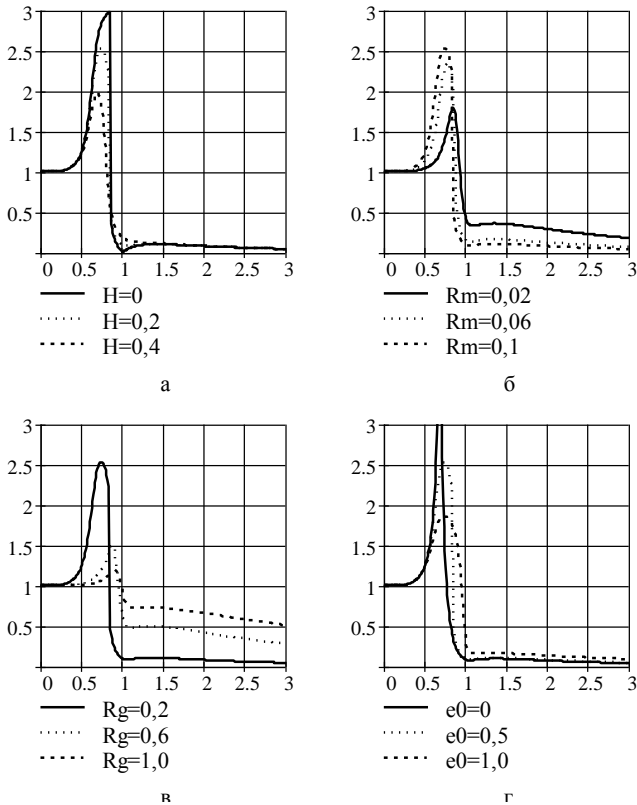


Рис. 6.8. Вплив на ефективність зрівноваження ротора зміни параметрів  $H, R_m, R_g, e_0$

На рис. 6.9 наведені графіки ефективності зрівноваження ротора при різній чутливості КВ до сил ваги - при різних  $R_g$ . З вигляду графіків можна зробити такі висновки:

- 1) в околі навколо-зарезонансних кутових швидкостей обертання ротора ефективність має локальний мінімум;
- 2) на швидкостях обертання ротора, які приблизно у 1,5 рази перевищують резонансну швидкість, ефективність має локальний максимум;
- 3) чутливість КВ до сил ваги помітно долається при перевищенні швидкістю обертання ротора резонансної швидкості у 3 (малі  $R_g$ )÷10 (великі  $R_g$ ) разів.

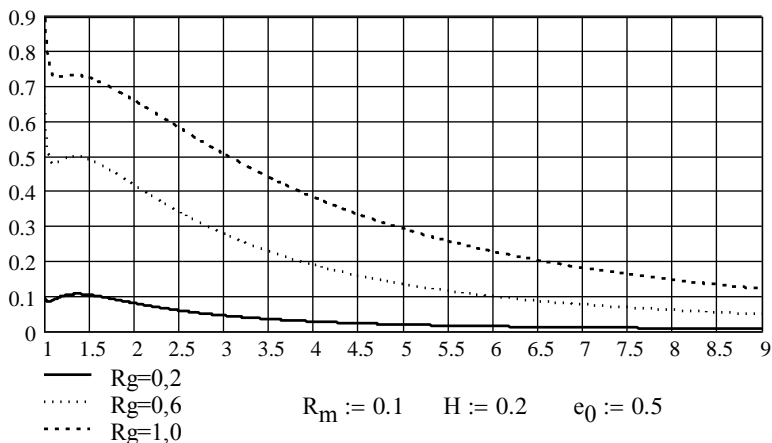


Рис. 6.9. Залежність ефективності зрівноваження ротора на резонансних швидкостях від впливу сил ваги - параметра  $R_g$

З розкладань (6.71), (6.74), (6.81) видно, що у випадку дисбалансів, які може зрівноважити АБП ( $e_0 < 1$ ):

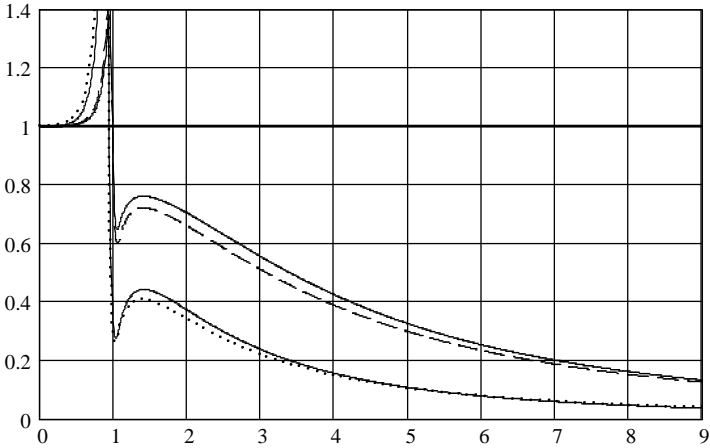
$$u \sim \begin{cases} 1, & R_\omega \sim 0; \\ \sqrt{1 - e_0^2}, & R_\omega \sim 1, \quad H \sim 0 \wedge R_\omega \gg 1. \end{cases} \quad (6.113)$$

Підставляючи в рівняння (6.40)  $u = \sqrt{1 - e_0^2}$ , одержимо наближену формулу для обчислення ефективності

$$n \approx \frac{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}{\sqrt{\left( R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} \sqrt{1 - e_0^2} \right)^2 + H^2 R_\omega^2}}. \quad (6.114)$$

Безпосередні обчислення показують, що формула придатна для обчислень для  $e_0 \leq 0,6$ . При зменшенні  $e_0$  похибка швидко спадає, а при збільшенні – зростає. На резонансних швидкостях обертання ротора формула (6.114) дещо збільшує  $n$ , а на дорезонансних – як збільшує, так і зменшує (рис. 6.10).

$$H = 0.1 \quad R_m = 0.1 \quad e_0 = 0.6$$



точні формули:  $\cdots$  -  $R_g = 0,5$ ;  $----$  -  $R_g = 1$ ; наближені формули —

Рис. 6.10. Перевірка наближеної формули (6.114) – залежність  $n = n(R_\omega)$  при різних  $R_g$

## 6.5. Теорія квазіперіодичних рухів

### 6.5.1. Кількість і умови існування квазіперіодичних рухів

**1. Виділення квазіперіодичних рухів.** Використовуємо диференціальні рівняння руху у вигляді (6.18). Шукаємо квазіперіодичний рух у вигляді

$$\alpha = \Omega\tau + \beta, \quad \varphi, \Omega = \text{const}. \quad (6.115)$$

Підставляючи (6.115) в (6.18), одержуємо таку систему рівнянь для визначення квазіперіодичних рухів:

$$\begin{aligned} s_1 &= R_g^2 \sin\varphi - \frac{i}{2} [\ddot{z}e^{-i(\Omega\tau+\gamma)} - \ddot{\bar{z}}e^{i(\Omega\tau+\gamma)}] \cos\varphi = 0, \\ s_2 &= h_2 R_\rho^2 (\Omega - R_\omega) - \frac{1}{2} [\ddot{z}e^{-i(\Omega\tau+\gamma)} + \ddot{\bar{z}}e^{i(\Omega\tau+\gamma)}] \sin\varphi = 0, \\ s_3 &= \ddot{z} + H\dot{z} + z - R_m [R_\omega^2 e_0 e^{iR_\omega\tau} + i\Omega^2 e^{i(\Omega\tau+\gamma)} \sin\varphi] = 0, \\ s_4 &= \ddot{\bar{z}} + H\dot{\bar{z}} + \bar{z} - R_m [R_\omega^2 e_0 e^{-iR_\omega\tau} - i\Omega^2 e^{-i(\Omega\tau+\gamma)} \sin\varphi] = 0. \end{aligned} \quad (6.116)$$

Частинний розв'язок останніх двох рівнянь в (6.116) має вигляд

$$z = R_m e_0 a(R_\omega) e^{iR_\omega\tau} + i R_m a(\Omega) \sin\varphi e^{i(\Omega\tau+\gamma)},$$

$$\bar{z} = R_m e_0 \bar{a}(R_\omega) e^{-iR_\omega \tau} - i R_m \bar{a}(\Omega) \sin \varphi e^{-i(\Omega \tau + \gamma)}, \quad (6.117)$$

де для стислості введено позначення

$$a(\omega) = \frac{\omega^2}{1 + iH\omega - \omega^2}, \quad \bar{a}(\omega) = \frac{\omega^2}{1 - iH\omega - \omega^2}. \quad (6.118)$$

Підставляючи (6.117) в перші два рівняння системи (6.116), одержимо такі рівняння для визначення  $\varphi$  і  $\Omega$ :

$$\left[ \frac{\Omega^4(\Omega^2 - 1)}{D(\Omega)} R_m \cos \varphi + R_g^2 \right] \sin \varphi + R_m e_0 R_\omega^4 \frac{(R_\omega^2 - 1) \sin \theta + HR_\omega \cos \theta}{D(R_\omega)} \cos \varphi = 0,$$

$$h_2 R_p^2 (\Omega - R_\omega) + \frac{\Omega^5 \sin^2 \varphi}{D(\Omega)} R_m H - R_m e_0 R_\omega^4 \frac{(R_\omega^2 - 1) \cos \theta - HR_\omega \sin \theta}{D(R_\omega)} \sin \varphi = 0, \quad (6.119)$$

де введено такі позначення

$$D(\omega) = (\omega^2 - 1)^2 + H^2 \omega^2, \quad \theta = (R_\omega - \Omega) \tau - \gamma. \quad (6.120)$$

З системи рівнянь (6.119) видно, що нестационарний рух вигляду (6.115) існуватиме за умови відсутності дисбалансу ( $e_0=0$ ). При цьому в системі (6.119) зникають складові, що залежать від часу ( $\theta$ ) і вона приймає вигляд

$$\left[ \frac{\Omega^4(\Omega^2 - 1)}{D(\Omega)} R_m \cos \varphi + R_g^2 \right] \sin \varphi = 0, \quad h_2 R_p^2 (\Omega - R_\omega) + \frac{\Omega^5 \sin^2 \varphi}{D(\Omega)} R_m H = 0. \quad (6.121)$$

Це система двох нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення двох невідомих  $\Omega$ ,  $\varphi$ .

Введемо нові параметри

$$R_{gm} = R_g^2 / R_m, \quad R_{mH} = R_m H / h_2 R_p^2. \quad (6.122)$$

Тоді система (6.121) перетвориться до вигляду

$$\left[ \frac{\Omega^4(\Omega^2 - 1)}{D(\Omega)} \cos \varphi + R_{gm} \right] \sin \varphi = 0, \quad R_{mH} \Omega^5 \sin^2 \varphi - D(\Omega)(R_\omega - \Omega) = 0. \quad (6.123)$$

При відсутності дисбалансу ( $e_0=0$ ) система (6.18) має точні однопараметричні розв'язки вигляду (6.115), де  $\Omega$ ,  $\varphi$  задовольняють систему (6.123) і

$$z_0 = i R_m a(\Omega) \sin \varphi e^{i(\Omega \tau + \gamma)}, \quad \bar{z}_0 = -i R_m \bar{a}(\Omega) \sin \varphi e^{-i(\Omega \tau + \gamma)}. \quad (6.124)$$

Ці розв'язки породжують однопараметричні сім'ї квазіперіодичних рухів, які виникають при появі малих дисбалансів ( $e_0 \ll 1$ ). Наближено у цих рухах повздовжня вісь ротора рухається за законом (6.117), а  $\Omega$ ,  $\varphi$  - майже сталі. Вважаючи дисбаланс малою величиною і використовуючи метод малого параметра, можна знайти  $\Omega$ ,  $\varphi$ ,  $z, \bar{z}$  у наступних наближеннях. Але розв'язки вигляду (6.115), (6.117) при малих

дисбалансах достатньо точно описують рух системи, а відповідно до експериментів, із зростанням дисбалансу ці рухи зникають. Тому немає потреби у пошуку наступних наближень до цих розв'язків.

**2. Умови існування квазіперіодичних рухів.** Для визначення умов існування квазіперіодичних рухів дослідимо кількість і умови існування розв'язків системи рівнянь (6.123).

**2.1. Нехтування силами ваги.** Розв'яжемо систему рівнянь (6.123) при неврахуванні сил ваги. В цьому випадку  $R_{gm} = 0$  і перше рівняння приймає вигляд:

$$\frac{\Omega^4(\Omega^2 - 1)R_m}{(\Omega^2 - 1)^2 + H^2\Omega^2} \cos \varphi \sin \varphi = 0. \quad (6.125)$$

Розглянемо можливі варіанти.

**1. Випадок, коли**

$$\Omega_{1/2} = \pm 1, \cos \varphi \neq 0, \sin \varphi \neq 0. \quad (6.126)$$

Останнє рівняння в (6.123) подамо у вигляді

$$\sin^2 \varphi \Big|_{\Omega=\Omega_{1/2}} = \pm \frac{(R_\omega \mp 1)H^2}{R_{mH}}. \quad (6.127)$$

З знаків рівняння видно, що побічний рух існує тільки для  $\Omega = 1$ ,  $R_\omega > 1$ . Отже, маємо такий розв'язок системи (6.123) при  $R_{gm} = 0$ :

$$\Omega_1 = 1, \sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{H^2(R_\omega - 1)}{R_{mH}}}, \quad R_\omega > 1. \quad (6.128)$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що  $\sin \varphi > 0$ . Випадок  $\sin \varphi < 0$  охоплюється довільністю кута  $\gamma$ . Для  $\sin \varphi > 0$  друге рівняння в (6.128) має два істотно відмінних розв'язки:

$$\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{H^2(R_\omega - 1)}{R_{mH}}}, \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1, \quad \Omega_{1/2} = 1. \quad (6.129)$$

У першому русі центр мас КВ під точкою підвісу, а у другому – над. Умова існування рухів (6.129)

$$0 < \frac{H^2(R_\omega - 1)}{R_{mH}} < 1,$$

звідки знаходимо:

$$1 < R_\omega < R_{\omega_1}^*, \quad R_{\omega_1}^* = 1 + \frac{R_{mH}}{H^2}. \quad (6.130)$$

**2. Випадок, коли**

$$\Omega \neq 1, \cos \varphi = 0. \quad (6.131)$$

У цьому випадку  $\sin\varphi = \pm 1$  і друге рівняння в системі (6.123) можна подати у вигляді

$$\tilde{P}(\Omega) = R_{mH}\Omega^5 - (R_\omega - \Omega)[(1 - \Omega^2)^2 + H^2\Omega^2] = 0. \quad (6.132)$$

Одержане рівняння співпало за виглядом з рівнянням (4.181), одержаним для багатокульового (багатомаятникового) АБП. Це дає можливість скористатися результатами теорії квазіперіодичних рухів цих пристроїв. Тоді основні результати наступні.

1) У важливих з точки зору практики випадках, зокрема, коли  $H, R_{mH} \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1$  (малі сил зовнішнього опору  $H \sim \varepsilon$ ; маса КВ набагато менша маси ротора і малі сили опору  $R_m, h, H \sim \varepsilon$  і інших):

- на дорезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_\omega < 1$ ) і зарезонансних швидкостях, менших за  $R_{\omega 1}^*$  ( $1 < R_\omega < R_{\omega 1}^*$ ), існує єдиний нестационарний рух  $\Omega_1$ , такий, що  $0 < \Omega_1 < 1$ ;
- на зарезонансних швидкостях, більших за  $R_{\omega 1}^*$ , але менших за  $R_\omega^*$  ( $R_{\omega 1}^* < R_\omega < R_\omega^*$ ), існують три нестационарних рухи  $\Omega_{1,2,3}$ , такі, що  $0 < \Omega_1 < 1 < \Omega_2 < \Omega_3 < R_\omega$ ;
- на зарезонансних швидкостях, більших за  $R_\omega^*$ , але менших за  $R_{\omega 2}^*$  ( $R_\omega^* < R_\omega < R_{\omega 2}^*$ ), існують три нестационарних рухи  $\Omega_{1,2,3}$ , такі, що  $1 < \Omega_1 < \Omega_2 \ll \Omega_3 < R_\omega$ ;
- на зарезонансних швидкостях, більших за  $R_{\omega 2}^*$  ( $R_\omega > R_{\omega 2}^*$ ), існує єдиний нестационарний рух  $\Omega_3$ , такий, що  $1 \ll \Omega_3 < R_\omega$ .

2) При будь-яких параметрах системи існує тільки один нестационарний рух  $\Omega_1$ , такий, що на певних швидкостях  $0 < \Omega_1 < 1$ , причому:

- на швидкостях, менших за  $R_\omega^*$  ( $R_\omega < R_\omega^*$ ),  $0 < \Omega_1 < 1$ ;
- на швидкостях, більших за  $R_\omega^*$  ( $R_\omega > R_\omega^*$ ),  $\Omega_1 > 1$ .

Критичні швидкості визначаються за формулами:

$$\forall H, R_{mH} : R_\omega^* = 1 + \frac{2R_{mH}}{H^2}, \quad (6.133)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} < \frac{R_{mH}}{H^3} \left( \frac{3\sqrt{3}}{8} < \frac{R_m}{H^2 h} \right):$$

$$R_{\omega 1}^* \approx 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{R_{mH}}, \quad R_{\omega 2}^* \approx 1 + \frac{2R_{mH}}{H^2} + \frac{9R_{mH}}{8}. \quad (6.134)$$

Частоти прецесії визначаються за формулами.

1) У випадку малих швидкостей обертання ротора  $R_\omega \ll 1$

$$\Omega_1 \approx R_\omega (1 - 2R_{mH} R_\omega^4). \quad (6.135)$$

2) У випадку, коли ротор швидко обертається  $R_\omega \gg 1$ :

$$\Omega_1 = \frac{R_\omega}{1 + 2R_{mH}}. \quad (6.136)$$

3) У випадках, коли  $H, R_{mH} \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1$  (малі сили зовнішнього опору  $H \sim \varepsilon$ ; коли маса КВ набагато менша маси ротора і малі сили опору  $h_2, H, R_m \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1$  і інших):

а) ротор обертається з скінченною швидкістю, на (скінченній) віддалі від резонансної швидкості:

$$R_\omega < 1: \Omega_1 \approx R_\omega - \frac{2R_{mH} R_\omega^5}{(R_\omega^2 - 1)^2};$$

$$R_\omega > 1: \Omega_{1/2} \approx 1 \mp \sqrt{\frac{R_{mH}}{2(R_\omega - 1)}}, \quad \Omega_3 \approx R_\omega - \frac{2R_{mH} R_\omega^5}{(R_\omega^2 - 1)^2}. \quad (6.137)$$

б) ротор обертається з навколо резонансною швидкістю  $(R_\omega - 1) \sim \sqrt[3]{\varepsilon}, \varepsilon \ll 1$ :

$$\Omega_1 \approx 1 - \frac{1}{2} \sqrt[3]{R_{mH}} (1 - w/3), \quad \Omega_{2/3} \approx 1 + \sqrt[3]{R_{mH}} (1 \mp \sqrt{w} - 2w/3),$$

$$w = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{R_{mH}}} (R_\omega - 1) - 1, \quad (6.138)$$

в) ротор швидко обертається  $1/R_\omega \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1$ :

$$\Omega_{1/2} \approx 1 \mp \sqrt{\frac{2R_{mH} - R_\omega H^2}{4R_\omega}}, \quad \Omega_3 \approx R_\omega (1 - 2R_{mH}), \quad (6.139)$$

Більш точно, в околі швидкості  $R_\omega^*$

$$\Omega_{1/2} \approx 1 + H^2 \left( \frac{3}{8} \pm \sqrt{9 - \frac{8H\sigma}{R_{mH}}} \right), \quad R_\omega = 1 + \frac{2R_{mH}}{H^2} + \sigma H, \quad (6.140)$$

де  $\sigma$  - параметр.

4) У випадку, коли  $R_{mH} \sim 1/\varepsilon, \varepsilon \ll 1$  (малі сили внутрішнього опору  $h \ll 1$ , а решта параметрів скінченна):

$$\Omega_1 \approx \sqrt[5]{\frac{R_\omega}{2R_{mH}}}. \quad (6.141)$$

5) У випадку, коли  $R_{mH} \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1$  (маса КВ набагато менша маси



ротора  $R_m \ll 1$ , а сили опору скінченні):

$$\Omega_1 \approx R_\omega - \frac{2R_{mH}R_\omega^5}{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2R_\omega^2}. \quad (6.142)$$

### 3. Випадак

$$\Omega \neq 1, \quad \sin \varphi = 0. \quad (6.143)$$

З другого рівняння в (6.123) знаходимо єдиний розв'язок  $\Omega = R_\omega$ , що відповідає обертанню КВ синхронно з ротором. Оскільки КВ у нейтральному положенні ( $\sin \varphi = 0$ ), то це побічний рух першої групи, що вже був вивчений раніше.

**2.2. Врахування сил ваги.** Розв'яжемо систему рівнянь (6.123) при врахуванні сил ваги.

Випадак, коли  $\sin \varphi = 0$ . З системи (6.123) знаходимо, що  $\Omega = R_\omega$ , тобто КВ синхронно обертається разом з ротором і не відхилений. Це так званий основний рух і він вивчений раніше.

Випадак, коли  $\sin \varphi \neq 0$ . Зробимо попередній аналіз кількості, умов існування і властивостей розв'язків системи (6.123). При фіксованому  $\varphi$  друге рівняння буде мати до трьох дійсних коренів у відкритому інтервалі  $(0, R_\omega)$ , що впливає з проведеного вище дослідження подібного рівняння ( $\tilde{R}_{mH} = R_{mH} \sin^2 \varphi$ ). Тому всі розв'язки системи повинні бути у цьому інтервалі. З першого рівняння в (6.123) знаходимо

$$\cos \varphi = -\frac{R_{gm}D(\Omega)}{\Omega^4(\Omega^2 - 1)}. \quad (6.144)$$

Оскільки невеликим  $R_\omega \ll 1$  відповідають невеликі  $\Omega < R_\omega$ , то права частина рівності (6.144) на цих швидкостях необмежено зростає. Тому на невеликих швидкостях нестационарні рухи не існують.

У нестационарних рухах, у яких  $\Omega < 1$ , як впливає з (6.144) -  $\cos \varphi > 0, |\varphi| < \pi/2$ , тобто центр мас КВ під точкою підвісу. У нестационарних рухах, у яких  $\Omega > 1$ , як впливає з (6.144) -  $\cos \varphi < 0, |\varphi| > \pi/2$ , тобто центр мас КВ над точкою підвісу.

На великих швидкостях обертання ротора  $R_\omega \gg 1$  і друге рівняння в (6.123) при фіксованому  $\varphi$  має єдиний корінь  $\Omega \sim R_\omega$ . Тому на великих швидкостях  $\cos \varphi \approx -R_{mg}/R_\omega^2$ , тобто прямує до  $-0$ , а  $\varphi \rightarrow \pi/2 + 0$ .

Після підстановки в друге рівняння в (6.123) рівності (6.144) воно зводиться до вигляду

$$b_0 + b_1\Omega + \dots + b_{12}\Omega^{12} = 0,$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= -2R_{mH}R_{gm}^2, & b_1 &= 0, & b_2 &= 4R_{mH}R_{gm}^2(2-H^2), & b_3 &= -R_\omega, \\
b_4 &= 1-2R_{mH}R_{gm}^2(6-4H^2+H^4), & b_5 &= (4-H^2)R_\omega, \\
b_6 &= -4+H^2+4R_{mH}R_{gm}^2(2-H^2), & b_7 &= -2(3-H^2)R_\omega, \\
b_8 &= 2[3-H^2+R_{mH}(1-R_{gm}^2)], & b_9 &= (4-H^2)R_\omega, \\
b_{10} &= -(4-H^2)+4R_{mH}, & b_{11} &= -R_\omega, & b_{12} &= 1+2R_{mH}.
\end{aligned} \tag{6.145}$$

Корені рівняння (6.144) неможливо визначити у аналітичному вигляді. Тому знайдемо їх наближено у важливих для практики випадках. Нас цікавлять корені з відкритого інтервалу  $(0, R_\omega)$ .

1. Розглядаємо випадок малих швидкостей обертання ротора  $R_\omega \ll 1$ . Оскільки невеликим  $R_\omega$  відповідають невеликі  $\Omega$ , то права частина рівності (6.144) на цих швидкостях необмежено зростає. Оскільки  $|\cos \varphi| \leq 1$ , то на невеликих швидкостях нестационарні рухи не існують.

2. Розглядаємо випадки, коли  $H, R_{mH} \sim \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

а) При скінченних швидкостях обертання ротора на деякій віддалі від резонансної частоти  $(R_\omega - 1) \sim \delta$ ,  $\delta \gg \varepsilon$  існують до п'яти дійсних коренів, які розташовані у порядку зростання:

$$\begin{aligned}
\Omega_{1/4} &\approx 1 \mp \sqrt{\frac{R_{mH}}{2(R_\omega - 1)}} + \frac{R_{mH}}{4} \frac{4R_\omega - 3}{(R_\omega - 1)^2}; & \Omega_{2/3} &\approx 1 \mp \frac{H^2 R_{gm}^2}{2} \left[ 1 + \frac{H^2 (R_\omega - 1)}{4R_{mH}} \right]; \\
\Omega_5 &\approx R_\omega - 2R_{mH} \left[ \frac{R_\omega^5}{(R_\omega^2 - 1)^2} - \frac{R_{gm}^2}{R_\omega^3} \right].
\end{aligned} \tag{6.146}$$

Видно, що розкладання для  $\Omega_{1,4,5}$  не придатні в околі резонансної швидкості. Рухи  $\Omega_{1-4}$  з'являються в околі резонансної швидкості. Необхідною умовою придатності розкладання є те, що воно дає  $\Omega_i$ , таке, що  $0 < \Omega_i < R_\omega$ .

б) При обертанні ротора з великими швидкостями  $R_\omega \sim 1/\varepsilon$  існують до п'яти дійсних коренів, які розташовані у порядку зростання:

$$\begin{aligned}
\Omega_{1/4} &\approx 1 \mp \sqrt{\frac{2R_{mH} - H^2 R_\omega}{4R_\omega} - \frac{H^2}{8} + \frac{R_{mH}}{R_\omega}} \mp \frac{R_{mH}}{2\sqrt{R_\omega^3(2R_{mH} - H^2 R_\omega)}}; \\
\Omega_{2/3} &\approx 1 \mp R_{gm} H^2 \sqrt{\frac{R_{mH}}{2(2R_{mH} - H^2 R_\omega)}} \pm R_{gm} H^4 \sqrt{\frac{R_{mH}}{8(2R_{mH} - H^2 R_\omega)^3}}; \\
\Omega_5 &\approx R_\omega(1 - 2R_{mH} + 4R_{mH}^2).
\end{aligned} \tag{6.147}$$

Видно, що рухи  $\Omega_{1,2,3,4}$  зникають в околі швидкості  $(2R_{mH} / H^2)$ .

в) При обертанні ротора з навколо резонансними швидкостями  $(R_\omega - 1) \sim \sqrt[3]{\varepsilon}$  існують до п'яти дійсних коренів, які розташовані у порядку зростання:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\approx 1 - \frac{1}{2} \sqrt[3]{R_{mH}} (1 - w/3); & \Omega_{2/3} &\approx 1 \mp \frac{H^2 R_{gm}^2}{2}; \\ \Omega_{4/5} &\approx 1 + \sqrt[3]{R_{mH}} (1 \mp \sqrt{w} - 2w/3), & w &= \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{R_{mH}}} (R_\omega - 1) - 1. \end{aligned} \quad (6.148)$$

Видно, що рухи  $\Omega_{4/5}$  з'являються коли  $w \geq 0$  - в околі швидкості  $(1 + \sqrt[3]{R_{mH}})$ .

3. При обертанні ротора з великими швидкостями  $R_\omega \gg 1$  існує тільки один дійсний корінь

$$\Omega_1 \approx \frac{R_\omega}{1 + 2R_{mH}}. \quad (6.149)$$

Зауважимо, що заміна  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$  призвела до виникнення у полінома (6.145) зайвих коренів, а саме, коли формально  $\cos^2 \varphi > 1$ . Це призводить до виникнення коренів, у яких  $\Omega \geq R_\omega$ . Тому частина рухів з'являється по одному, коли швидкість обертання ротора переходить відповідну критичну швидкість  $R_{\omega_i}$ , при якій  $\Omega_i^* = R_{\omega_i}$ ,  $\cos^2 \varphi_i^* = 1$ . Частина рухів з'являється парами, через поділ одного граничного руху на два. Перші 4 рухи зникають тільки парами, через попарне злиття і зникнення.

Для пошуку перших критичних швидкостей, при переході через які по одному з'являються критичні швидкості, досліджувалися два рівняння:

$$\cos \varphi = 1, \quad 0 < \Omega < 1; \quad \cos \varphi = -1, \quad 1 < \Omega < R_\omega. \quad (6.150)$$

Для визначення критичних швидкостей, при переході через які попарно з'являються чи зникають рухи, досліджувалося рівняння

$$\frac{dR_\omega}{d\Omega} = 0, \quad 0 < \Omega < R_\omega, \quad (6.151)$$

де  $R_\omega$  визначений з (6.145).

Дослідження дозволяють зробити такі висновки щодо виникнення рухів  $\Omega_i$  у випадку, коли  $H, R_{mH} \sim \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

а) Якщо  $R_{gm} > 4$ , то існують п'ять критичних швидкостей

$$R_{\omega 1} \approx \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{R_{gm}^2 + 4R_{gm}} - R_{gm} \right)}, \quad R_{\omega 2/3} \approx 1 \mp \frac{R_{gm} H^2}{2} - \frac{R_{gm}^2 H^4}{2} \left( \frac{5}{4} \pm R_{gm} \right),$$

$$R_{\omega 4/5} \approx \sqrt{\frac{1}{2} \left( R_{gm} \mp \sqrt{R_{gm}^2 - R_{rm}} \right)}, \quad 0 < R_{\omega 1} < R_{\omega 2} < 1 < R_{\omega 3} < R_{\omega 4} < R_{\omega 5}. \quad (6.152)$$

Перші два рухи виходять з першого основного руху і послідовно з'являються при переході швидкістю обертання ротора через перші дві критичні швидкості:  $\Omega_i^* = R_{\omega i}$ ,  $\varphi_i^* = 0$ ,  $i=1,2/$ . Решта три рухи зароджуються з другого основного руху і послідовно з'являються при переході швидкістю обертання ротора через останні три критичні швидкості:  $\Omega_i^* = R_{\omega i}$ ,  $\varphi_i^* = \pi$ ,  $i=3,4,5/$ . Отже, має місце біфуркація рухів через зародження нестационарних рухів з основних.

б) Якщо  $R_{gm} \leq 4$ , то перші три рухи з'являються як і раніше, а останні дві критичні швидкості  $R_{\omega 4,5}$  зливаються, і побічні рухи 4, 5 одночасно з'являються, причому не з основних рухів:

$$R_{\omega 4,5} \approx 1 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{R_{mH}} + 2 \sqrt[3]{R_{mH}^2} + \left( \frac{53}{24} - 2R_{gm}^2 \right) R_{mH} + \left( \frac{415}{216} + 6R_{gm}^2 \right) \sqrt[3]{R_{mH}^4} +$$

$$+ \left( \frac{2957}{2592} - 8R_{mg}^2 \right) \sqrt[3]{R_{mH}^5} - \frac{H^2}{8 \sqrt[3]{R_{mH}}} + \left( \frac{7}{48} + 8R_{mg}^2 \right) R_{mH}^2 - \frac{7H^2}{24},$$

$$\Omega_{4,5}^* \approx 1 + \sqrt[3]{R_{mH}} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{R_{mH}^2} + \left( \frac{53}{24} - 2R_{gm}^2 \right) R_{mH} - \left( \frac{415}{648} + 2R_{gm}^2 \right) \sqrt[3]{R_{mH}^4} +$$

$$- \left( \frac{2957}{3888} - \frac{16}{3} R_{mg}^2 \right) \sqrt[3]{R_{mH}^5} - \frac{H^2}{6 \sqrt[3]{R_{mH}}} - \left( \frac{7}{48} + 4R_{mg}^2 \right) R_{mH}^2 - \frac{7H^2}{24}. \quad (6.153)$$

При зародженні цих рухів  $-1 < \cos \varphi_{4,5}^* < 0$ , тобто КВ початково відхилений і його центр мас над точкою підвісу. Із збільшенням кутової швидкості ці рухи розбігаються.

Дослідження дозволяють зробити такі висновки щодо зникнення рухів  $\Omega_i$  у випадку, коли  $H, R_{mH} \sim \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

а) Перші 4 нестационарні рухи зникають парами через злиття і зникнення, причому рух  $\Omega_1$  зливається з рухом  $\Omega_2$  на швидкості  $R_{\omega 1,2}^*$ , а рух  $\Omega_3$  з рухом  $\Omega_4$  на швидкості  $R_{\omega 3,4}^*$ :

$$R_{\omega 1,2}^* \approx \frac{2R_{mH}}{H^2} - \frac{4R_{gm}R_{mH}}{H} + 1 - 3R_{mH} \sqrt{\frac{R_{gm}}{H}} + \frac{9R_{mH}}{32} -$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \sqrt{R_{gm}^3} + \frac{9}{256\sqrt{R_{gm}}} \right) \frac{3}{2} R_{mH} \sqrt{H} - \frac{\sqrt{R_{gm}H^3}}{2}, \\
\Omega_{1,2}^* & \approx 1 - \frac{\sqrt{R_{gm}H^3}}{2} + \frac{3H^2}{32} - \left( \sqrt{R_{gm}^3} + \frac{27}{256\sqrt{R_{gm}}} \right) \frac{\sqrt{H^5}}{4}; \\
R_{\omega 3,4}^* & \approx \frac{2R_{mH}}{H^2} - \frac{4R_{gm}R_{mH}}{H} + 1 + 3R_{mH} \sqrt{\frac{R_{gm}}{H}} + \frac{9R_{mH}}{32} + \\
& + \left( \sqrt{R_{gm}^3} + \frac{9}{256\sqrt{R_{gm}}} \right) \frac{3}{2} R_{mH} \sqrt{H} + \frac{\sqrt{R_{gm}H^3}}{2}, \\
\Omega_{3,4}^* & \approx 1 + \frac{\sqrt{R_{gm}H^3}}{2} + \frac{3H^2}{32} + \left( \sqrt{R_{gm}^3} + \frac{27}{256\sqrt{R_{gm}}} \right) \frac{\sqrt{H^5}}{4}. \quad (6.154)
\end{aligned}$$

б) Під час зникнення нестационарних рухів КВ відхилений  $\cos \varphi_i^* \neq \pm 1$ , і тому рухи зникають, а не зливаються з основним рухом.

в) Рухи, в яких  $\Omega_i < 1$ , зникають на швидкостях, більших за  $R_{\omega 1,2}^*$ .

Числові дослідження формул (6.153), (6.154) показали їх придатність у широкій області зміни параметрів. Якщо  $H < 0,05$ ;  $R_{mH} < 0,1$ , то похибка наближених формул складає до 3%.

**3. Аналіз закону руху ротора у квазіперіодичних рухах.** Перетворимо закон квазіперіодичного руху ротора (6.117) до зручного для досліджень вигляду. Подамо рівняння (6.117) у вигляді

$$\begin{aligned}
z = & \frac{R_m \Omega^2 \sin \varphi}{\sqrt{D(\Omega)}} i e^{i(\Omega\tau + \gamma)} \left[ \frac{1 - \Omega^2}{\sqrt{D(\Omega)}} - \frac{iH\Omega}{\sqrt{D(\Omega)}} \right] - \\
& - \frac{R_m R_{\omega}^2 e_0}{\sqrt{D(R_{\omega})}} e^{iR_{\omega}\tau} \left[ \frac{R_{\omega}^2 - 1}{\sqrt{D(R_{\omega})}} + \frac{iHR_{\omega}}{\sqrt{D(R_{\omega})}} \right]. \quad (6.155)
\end{aligned}$$

Введемо у розглядання кути

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : \cos \gamma_1 & = \frac{1 - \Omega^2}{\sqrt{D(\Omega)}}, \quad \sin \gamma_1 = \frac{H\Omega}{\sqrt{D(\Omega)}}, \\
\gamma_2 : \cos \gamma_2 & = \frac{R_{\omega}^2 - 1}{\sqrt{D(R_{\omega})}}, \quad \sin \gamma_2 = \frac{HR_{\omega}}{\sqrt{D(R_{\omega})}}. \quad (6.156)
\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$\cos \gamma_1 - i \sin \gamma_1 = e^{-i\gamma_1}$ ,  $\cos \gamma_2 + i \sin \gamma_2 = e^{i\gamma_2}$ ,  $i = e^{i\pi/2}$ ,  $-1 = e^{i\pi}$ ,  
перетворюємо рівняння (6.155) до вигляду

$$z = \frac{R_m \Omega^2 \sin \varphi}{\sqrt{D(\Omega)}} i e^{i(\Omega \tau + \gamma - \gamma_1 + \pi/2)} + \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{D(R_\omega)}} e^{i(R_\omega \tau + \gamma_2 + \pi)}. \quad (6.157)$$

Оберемо новий момент часу  $\tau_0$  за початковий і введемо новий час  $T$

$$\tau = \tau_0 + T, \quad T = \tau - \tau_0. \quad (6.158)$$

Початковий момент часу обираємо з такої умови

$$\Omega \tau_0 + \gamma - \gamma_1 + \pi/2 = R_\omega \tau_0 + \gamma_2 + \pi = \Gamma,$$

з якої знаходимо

$$\tau_0 = \frac{\gamma - \gamma_1 - \gamma_2 - \pi/2}{R_\omega - \Omega}, \quad \Gamma = \frac{(\gamma - \gamma_1 + \pi/2)R_\omega - (\gamma_2 + \pi)\Omega}{R_\omega - \Omega}. \quad (6.159)$$

Оскільки  $\Omega < R_\omega$ , то  $\tau_0, \Gamma$  завжди існують. Тоді рівняння (6.157) прийме вигляд

$$z = \left[ \frac{R_m \Omega^2 \sin \varphi}{\sqrt{D(\Omega)}} e^{i\Omega T} + \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{D(R_\omega)}} e^{iR_\omega T} \right] e^{i\Gamma}. \quad (6.160)$$

Перейдемо до осей, повернутих на кут  $\Gamma$ . Вводимо нову комплексну координату

$$Z = z e^{-i\Gamma}. \quad (6.161)$$

Тоді закон руху повздовжньої осі ротора прийме вигляд

$$Z = A_n e^{i\Omega T} + A_n e^{iR_\omega T},$$

$$A_n = \frac{R_m \Omega^2 \sin \varphi}{\sqrt{D(\Omega)}}, \quad A_n = \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{D(R_\omega)}}. \quad (6.162)$$

Аналіз одержаного рівняння показує, що (див. теорію квазіперіодичних рухів багатокульового і багатомаятникового АБП – п.6.4 розділу 6 5):

- 1) що рух повздовжньої осі ротора є сумою двох рухів
  - повільної прецесії з кутовою швидкістю  $\Omega$  і амплітудою  $A_n$ ,
  - швидкої нутації з кутовою швидкістю  $R_\omega$  і амплітудою  $A_n$ ,
- і крива, по якій рухається повздовжня вісь, є гіпоциклоїдою;

- 2) якщо частота нутації у ціле число  $k = R_\omega / \Omega$ ,  $k \in N$  перевищує частоту прецесії, то рух періодичний з періодом

$$T^* = 2\pi / \Omega, \quad (6.163)$$

гіпоциклоїда замкнена і має  $(k-1)$  пелюсток;

- 3) якщо частота нутації у раціональне число  $q = n/m = R_\omega / \Omega$ ,  $n, m \in N$  ( $n$  не ділиться на  $m$ ) перевищує частоту прецесії, то рух

періодичний з періодом

$$T^* = 2\pi m / \Omega, \quad (6.164)$$

гіпоциклоїда замкнена, має  $(n-m)$  пелюсток, які замикаються, охопивши центр  $m$  разів;

4) якщо частота нутації у ірраціональне число разів  $r = R_\omega / \Omega$ ,  $r \in N/Q$  перевищує частоту прецесії, то рух квазіперіодичний і гіпоциклоїда розімкнена.

### 6.5.2. Стійкість квазіперіодичних рухів

Дослідимо стійкість рухів, які породжують квазіперіодичні рухи. Для цього зручно використовувати диференціальні рівняння руху системи у вигляді (6.22). У рухомій системі координат ця задача розв'язується із застосуванням теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем.

При відсутності дисбалансу ( $e_0 = 0$ ) у русі, який породжує квазіперіодичні рухи,

$$\beta, \varphi = \text{const}, \quad (6.165)$$

і система (6.22) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= R_g^2 \sin \varphi + \frac{i}{2} \Omega^2 (q e^{-i\beta} - \bar{q} e^{i\beta}) \cos \varphi = 0, \\ \tilde{R}_2 &= h_2 (\Omega - R_\omega) R_p^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 (q e^{-i\beta} + \bar{q} e^{i\beta}) \sin \varphi = 0, \\ \tilde{R}_3 &= q (1 - \Omega^2 + iH\Omega) - iR_m \Omega^2 \sin \varphi e^{i\beta} = 0, \quad \tilde{R}_4 = \bar{\tilde{R}}_3. \end{aligned} \quad (6.166)$$

З останніх двох рівнянь знаходимо:

$$q = \frac{iR_m \Omega^2 \sin \varphi e^{i\beta}}{1 - \Omega^2 + iH\Omega}, \quad \bar{q} = \frac{-iR_m \Omega^2 \sin \varphi e^{-i\beta}}{1 - \Omega^2 - iH\Omega}. \quad (6.167)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \Omega^2 (\tilde{q} e^{-i\beta} - \bar{\tilde{q}} e^{i\beta}) &= -\frac{\Omega^4 (1 - \Omega^2) R_m}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} \sin \tilde{\varphi}, \\ \frac{1}{2} \Omega^2 (\tilde{q} e^{-i\beta} + \bar{\tilde{q}} e^{i\beta}) &= \frac{\Omega^5 H R_m}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} \sin \tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (6.168)$$

і перші два рівняння в (6.166) перетворюються до вигляду

$$\tilde{R}_1 = \left[ R_g^2 - \frac{\Omega^4 (1 - \Omega^2) R_m}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} \cos \varphi \right] \sin \varphi = 0,$$

$$\tilde{R}_2 = h_2(\Omega - R_\omega)R_p^2 + \frac{\Omega^5 HR_m \sin^2 \varphi}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} = 0. \quad (6.169)$$

Система (6.169) співпадає з системою (6.121) і призначена для визначення  $\Omega$ ,  $\varphi$ .

**1. Нехтування силами ваги.** Одержимо рівняння першого наближення і характеристичне рівняння. Вводимо збурений рух

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \gamma, \quad \beta = \tilde{\beta} + \delta, \quad q = \tilde{q} + p, \quad |\gamma|, |\delta|, |p| \ll 1. \quad (6.170)$$

Перетворюємо перше рівняння в (6.22):

$$\begin{aligned} R_1 \approx \ddot{\gamma} + h_1 \dot{\gamma} - \frac{i}{2} \{ [\ddot{p} + 2i\Omega \dot{p} - \Omega^2(\tilde{q} + p)] e^{-i\tilde{\beta}} (1 - i\delta) - \\ - [\ddot{\bar{p}} - 2i\Omega \dot{\bar{p}} - \Omega^2(\tilde{q} + \bar{p})] e^{i\tilde{\beta}} (1 + i\delta) \} (\cos \tilde{\varphi} - \gamma \sin \tilde{\varphi}), \\ \text{або з точністю до величин першого порядку малості} \\ R_1 \approx \ddot{\gamma} + h_1 \dot{\gamma} - \frac{i}{2} \Omega^2 (\tilde{q} e^{-i\tilde{\beta}} - \tilde{q} e^{i\tilde{\beta}}) \gamma \sin \tilde{\varphi} + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{q} e^{-i\tilde{\beta}} + \tilde{q} e^{i\tilde{\beta}}) \delta \cos \tilde{\varphi} - \\ - \frac{i}{2} [(\ddot{p} + 2i\Omega \dot{p} - \Omega^2 p) e^{-i\tilde{\beta}} - (\ddot{\bar{p}} - 2i\Omega \dot{\bar{p}} - \Omega^2 \bar{p}) e^{i\tilde{\beta}}] \cos \tilde{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (6.171)$$

Вводимо нові змінні

$$x = p e^{-i\tilde{\beta}}, \quad \bar{x} = \bar{p} e^{i\tilde{\beta}}. \quad (6.172)$$

З врахуванням (6.168) рівняння (6.171) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} R_1 \approx \ddot{\gamma} + h_1 \dot{\gamma} + \frac{\Omega^4 (1 - \Omega^2) R_m \sin^2 \tilde{\varphi}}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} \gamma + \frac{\Omega^5 HR_m \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi}}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} \delta - \\ - \frac{i}{2} [\ddot{x} + 2i\Omega \dot{x} - \Omega^2 x - (\ddot{\bar{x}} - 2i\Omega \dot{\bar{x}} - \Omega^2 \bar{x})] = 0. \end{aligned} \quad (6.173)$$

Перетворюємо друге рівняння системи (6.22):

$$\begin{aligned} R_2 \approx (\ddot{\delta} + h_2 \dot{\delta}) R_p^2 - \frac{1}{2} \{ [\ddot{p} + 2i\Omega \dot{p} - \Omega^2(\tilde{q} + p)] e^{-i\tilde{\beta}} (1 - i\delta) + \\ + [\ddot{\bar{p}} - 2i\Omega \dot{\bar{p}} - \Omega^2(\tilde{q} + \bar{p})] e^{i\tilde{\beta}} (1 + i\delta) \} (\sin \tilde{\varphi} + \gamma \cos \tilde{\varphi}), \\ R_2 \approx (\ddot{\delta} + h_2 \dot{\delta}) R_p^2 - \frac{i}{2} \Omega^2 (\tilde{q} e^{-i\tilde{\beta}} - \tilde{q} e^{i\tilde{\beta}}) \delta \sin \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} \Omega^2 (\tilde{q} e^{-i\tilde{\beta}} + \tilde{q} e^{i\tilde{\beta}}) \gamma \cos \tilde{\varphi} - \\ - \frac{1}{2} \{ (\ddot{p} + 2i\Omega \dot{p} - \Omega^2 p) e^{-i\tilde{\beta}} + (\ddot{\bar{p}} - 2i\Omega \dot{\bar{p}} - \Omega^2 \bar{p}) e^{i\tilde{\beta}} \} \sin \tilde{\varphi}. \end{aligned}$$

Після підстановки рівностей (6.172) остаточно маємо

$$R_2 \approx (\ddot{\delta} + h_2 \dot{\delta}) R_p^2 + \frac{\Omega^4 (1 - \Omega^2) R_m \sin^2 \tilde{\varphi}}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} \delta + \frac{\Omega^5 HR_m \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi}}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} \gamma -$$



$$-\frac{1}{2}(\ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x + \ddot{\bar{x}} - 2i\Omega\dot{\bar{x}} - \Omega^2 \bar{x}) \sin \tilde{\varphi} = 0. \quad (6.174)$$

Перетворюємо третє (четверте) рівняння системи (6.22):

$$R_3 \approx \dot{p} + 2i\Omega\dot{p} - \Omega^2 p + H(\dot{p} + i\Omega p) + p - R_m[(2\Omega\dot{\gamma} - \ddot{\gamma}) \cos \tilde{\varphi} + (\ddot{\delta} \sin \tilde{\varphi} + 2i\Omega\dot{\delta} \sin \tilde{\varphi} + i\Omega^2 \sin \tilde{\varphi} + i\Omega^2 \gamma \cos \tilde{\varphi})] e^{i\tilde{\beta}} (1 + i\delta).$$

Звідки знаходимо:

$$r_3 = R_3 e^{-i\tilde{\beta}} \approx \ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x + H(\dot{x} + i\Omega x) + x + R_m[i(\ddot{\gamma} + 2i\Omega\dot{\gamma} - \Omega^2 \gamma) \cos \tilde{\varphi} - (\ddot{\delta} + 2i\Omega\dot{\delta} - \Omega^2 \delta) \sin \tilde{\varphi}] = 0, \quad r_4 = \bar{r}_3. \quad (6.175)$$

Вводимо у розглядання коефіцієнти

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\lambda + i\Omega)^2 + H(\lambda + i\Omega) + 1, & a_{13} &= (\lambda + i\Omega)^2, \\ a_{33} &= \lambda^2 + h_1\lambda + b, & a_{44} &= (\lambda^2 + h_2\lambda)R_p^2 + b, & a_{34} &= c, \\ b &= \frac{\Omega^4(1 - \Omega^2)R_m \sin^2 \tilde{\varphi}}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2\Omega^2}, & c &= \frac{\Omega^5 H R_m \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi}}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2\Omega^2}. \end{aligned} \quad (6.176)$$

Тоді характеристичне рівняння системи (6.173)-(6.175) задається визначником

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & iR_m a_{13} \cos \tilde{\varphi} & -R_m a_{13} \sin \tilde{\varphi} \\ 0 & \bar{a}_{11} & -iR_m \bar{a}_{13} \cos \tilde{\varphi} & -R_m \bar{a}_{13} \sin \tilde{\varphi} \\ -\frac{i}{2} a_{13} \cos \tilde{\varphi} & \frac{i}{2} \bar{a}_{13} \cos \tilde{\varphi} & a_{33} & a_{34} \\ -\frac{1}{2} a_{13} \sin \tilde{\varphi} & -\frac{1}{2} \bar{a}_{13} \sin \tilde{\varphi} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (6.177)$$

Розкриваючи визначник, одержуємо

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= a_{11} \bar{a}_{11} (a_{33} a_{44} - a_{34}^2) - \frac{R_m}{2} (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) (a_{33} \sin^2 \tilde{\varphi} + a_{44} \cos^2 \tilde{\varphi}) + \\ &+ R_m^2 a_{13}^2 \bar{a}_{13}^2 \sin^2 \tilde{\varphi} \cos^2 \tilde{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (6.178)$$

Можна перевірити, що для будь-якого випадку  $\Delta(0) = 0$ . Це пояснюється тим, що досліджується стійкість однопараметричної сім'ї усталених рухів, а не тим, що цей випадок є критичним.

**1.1. Дослідження стійкості у першому випадку -  $\Omega = 1$ .** В цьому випадку коефіцієнти (6.176) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\lambda + i)^2 + H(\lambda + i) + 1, & a_{13} &= (\lambda + i)^2, \\ a_{33} &= \lambda^2 + h_1\lambda, & a_{44} &= (\lambda^2 + h_2\lambda)R_p^2, & a_{34} &= \frac{R_m}{H} \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (6.179)$$

Характеристичне рівняння у явному вигляді має вигляд:

$$\Delta(\lambda) = b_8 \lambda^8 + b_7 \lambda^7 + \dots + b_1 \lambda,$$

$$b_1 = -\frac{4R_m^2}{H} \sin^2 \tilde{\varphi} \cos^2 \tilde{\varphi} < 0, \dots, b_8 = (1 - R_m \cos^2 \tilde{\varphi})(R_p^2 - R_m \sin^2 \tilde{\varphi}) > 0. \quad (6.180)$$

Через те, що у коефіцієнтів різні знаки (за наслідками з теореми Вієта) заключаємо, що цей рух завжди нестійкий.

**1.2. Дослідження стійкості у другому випадку -  $\cos \tilde{\varphi} = 0$ .** У цьому випадку

$$b = \frac{\Omega^4(1 - \Omega^2)R_m}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2\Omega^2}, \quad c = 0, \quad (6.181)$$

і характеристичне рівняння (6.178) прийме вигляд:

$$\Delta(\lambda) = \left[ a_{11}\bar{a}_{11}a_{44} - \frac{R_m}{2}(a_{11}\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11}a_{13}^2) \right] a_{33} = 0. \quad (6.182)$$

Характеристичне рівняння розпалося на два множники:

$$\Delta_1(\lambda) = a_{33} = 0, \quad \Delta_2(\lambda) = a_{11}\bar{a}_{11}a_{44} - \frac{R_m}{2}(a_{11}\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11}a_{13}^2) = 0. \quad (6.183)$$

Перший множник дає умову стійкості  $b > 0$ , звідки знаходимо таку необхідну умову асимптотичної стійкості

$$\Omega < 1. \quad (6.184)$$

Таким чином, може бути стійким тільки той побічний рух, у якому  $\Omega < 1$ .

Досліджуємо другий множник. Введемо новий коефіцієнт

$$A_{33} = \lambda^2 + h_2\lambda. \quad (6.185)$$

З врахуванням (6.179), другий множник прийме вигляд

$$\Delta_2(\lambda) / R_p^2 = a_{11}\bar{a}_{11}A_{33} - \tilde{R}_m(a_{11}\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11}a_{13}^2) = 0. \quad (6.186)$$

Одержане характеристичне рівняння співпало з рівнянням (5.215), одержаним для багатокульового (багатомаятникового) АБП (при  $h = h_2$ ,  $R_m = \tilde{R}_m$ , з врахуванням, що  $A_{33} = a_{33}$ ). Оскільки також співпали рівняння для визначення частот прецесії, то співпадуть і умови стійкості квазіперіодичних рухів для двох типів АБП. Отже, заключаємо, що нестационарний побічний рух  $\Omega_1$ , у якому  $\Omega_1 < 1$ , асимптотично стійкий у області власного існування, тобто на швидкостях

$$R_{\omega} \in (0, R_{\omega}^*), \quad R_{\omega}^* = 1 + 2\tilde{R}_m / h_2H, \quad (6.187)$$

а решта квазіперіодичних рухів нестійка.

**2. Врахування сил ваги.** Через математичну складність задачі обмежимося математичною постановкою задачі. Одержимо рівняння першого наближення і характеристичне рівняння. Видно, що при врахуванні сил ваги зміниться тільки перше рівняння (6.173), а рівняння (6.174) і (6.175) не зміняться. Розглядаємо

$$R_1 \approx \ddot{\gamma} + h_1 \dot{\gamma} + \gamma R_g^2 \cos \tilde{\varphi} - \frac{i}{2} \{ [\ddot{p} + 2i\Omega \dot{p} - \Omega^2(\tilde{q} + p)] e^{-i\tilde{\beta}} (1 - i\delta) - \\ - [\ddot{\bar{p}} - 2i\Omega \dot{\bar{p}} - \Omega^2(\tilde{q} + \bar{p})] e^{i\tilde{\beta}} (1 + i\delta) \} (\cos \tilde{\varphi} - \gamma \sin \tilde{\varphi}),$$

або з точністю до величин першого порядку малості

$$R_1 \approx \ddot{\gamma} + h_1 \dot{\gamma} + \gamma R_g^2 \cos \tilde{\varphi} - \frac{i}{2} \Omega^2 (\tilde{q} e^{-i\tilde{\beta}} - \bar{q} e^{i\tilde{\beta}}) \gamma \sin \tilde{\varphi} + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{q} e^{-i\tilde{\beta}} + \bar{q} e^{i\tilde{\beta}}) \delta \cos \tilde{\varphi} - \\ - \frac{i}{2} [(\ddot{p} + 2i\Omega \dot{p} - \Omega^2 p) e^{-i\tilde{\beta}} - (\ddot{\bar{p}} - 2i\Omega \dot{\bar{p}} - \Omega^2 \bar{p}) e^{i\tilde{\beta}}] \cos \tilde{\varphi} = 0. \quad (6.188)$$

З першого рівняння в (6.169) знаходимо

$$\frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} = \frac{\Omega^4 (1 - \Omega^2) R_m}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2}.$$

З врахуванням рівностей (6.168) рівняння (6.188) прийме вигляд

$$R_1 \approx \ddot{\gamma} + h_1 \dot{\gamma} + \frac{\Omega^4 (1 - \Omega^2) R_m}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} \gamma + \frac{\Omega^5 H R_m \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi}}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} \delta - \\ - \frac{i}{2} [\ddot{x} + 2i\Omega \dot{x} - \Omega^2 x - (\ddot{\bar{x}} - 2i\Omega \dot{\bar{x}} - \Omega^2 \bar{x})] = 0. \quad (6.189)$$

Введемо коефіцієнти

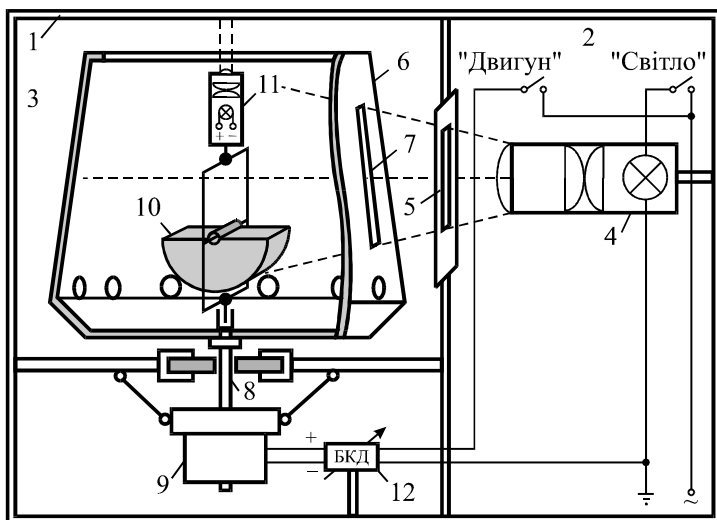
$$a_{11} = (\lambda + i\Omega)^2 + H(\lambda + i\Omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + i\Omega)^2, \\ a_{33} = \lambda^2 + h_1 \lambda + b, \quad a_{44} = (\lambda^2 + h_2 \lambda) R_p^2 + b \sin^2 \tilde{\varphi}, \quad a_{34} = c, \\ b = \frac{\Omega^4 (1 - \Omega^2) R_m}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2}, \quad c = \frac{\Omega^5 H R_m \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi}}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2}. \quad (6.190)$$

Тоді характеристичне рівняння системи знову задається визначником (6.177), або рівнянням (6.178). Можна перевірити, що  $\Delta(0) = 0$ . Це пояснюється тим, що досліджується стійкість однопараметричної сім'ї усталених рухів.

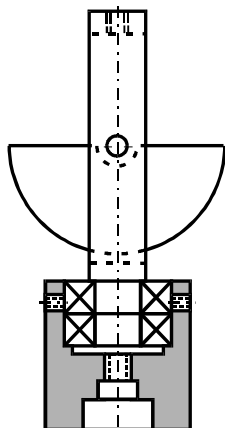
У подальшому стійкість можна досліджувати числовими обчисленнями коренів характеристичного рівняння. Можна також розкласти корені характеристичного рівняння (6.178) за степенями малого параметра. При цьому у рівняння треба замість  $\Omega$  підставляти відповідне розкладання, що значно ускладнює цей процес.

## 6.6. Експериментальне дослідження динаміки ротора з АБП

На рис. 6.11, а зображена схема станда з АБП, а на рис. 6.11, б, в - схема і фотографія моделі АБП. Стенд і методика проведення на ньому експериментів описані у розділі 4.



а



б



в

Рис. 6.11. Універсальний стенд і модель АБП:  
а – схема станда; б – схема АБП; в – фотографія АБП

Балансувальна ємність пристрою  $S_{\text{АБП}}$  приблизно у два рази менша за дисбаланс, при якому барабан починає битися об корпус машини під час розгону. Це дозволяє вивчати роботу АБП при зрівноваженні дисбалансів, що змінюються від 0 до 2 балансувальних ємностей АБП. Характеристики системи наступні:

$$M = 6,21 \text{ кг}, \quad m = 0,250 \text{ кг}, \quad \omega_0 = 3,30 \text{ об/с}, \quad S_{\text{АБП}} = 450 \text{ гр}\cdot\text{см}, \quad (6.191)$$

де  $M$  - сумарна маса обертових частин двигуна, центрифуги й АБП;  $m$  - маса одного КВ;  $\omega_0$  - резонансна частота.

**Центрування лазерного променя і перевірка якості виготовлення АБП.** Для центрування лазерного променя на вал був нагвинчений АБП без КВ. Статичне центрування лазерного променя здійснювалося чотирма болтами на його корпусі. Динамічне центрування пов'язане з динамічним балансуванням ротора і здійснювалося за методикою, викладеною у п. 4.5 глави 4 – у двох площинах корекції з застосуванням лазерного променя, поляризаційного фільтра і екрана. Після центрувань лазерний промінь вказує у своє статичне положення незалежно від кута повороту ротора (статичне центрування) і на всьому діапазоні зарезонансних швидкостей обертання ротора (динамічне центрування). Після поміщення КВ в АБП лазерний промінь також вказує у статичне положення на всьому діапазоні зарезонансних швидкостей обертання ротора, що свідчить про якісне виготовлення моделі АБП.

**Результати експериментальних досліджень.** Експериментально досліджувалися: швидкість і якість зрівноваження АБП різних дисбалансів на різних швидкостях обертання ротора, стійкість різних ustalених рухів, тривалість перехідних процесів, режими розгону і вибігу ротора, реакції на збурення різного походження.

На рис. 6.12 зображені КВ усередині ротора при різних дисбалансах на великих швидкостях обертання ротора, що у 15 разів ( $R_{\omega} = 15$ ) перевищують резонансну швидкість.

При відсутності дисбалансу, або малому дисбалансі ( $S \leq 0,1$  – безрозмірний дисбаланс, причому  $S=1$  – балансувальна ємність АБП) КВ займає нейтральне положення і його центр мас знаходиться під поперечною віссю обертання – рис. 6.12, а, чи – над, рис. 6.12, б. Лазерний промінь без КВ в АБП описує коло малого діаметру, а при наявності КВ – практично вказує у своє статичне положення – рис. 6.13, а.

При середньому дисбалансі ( $S=0,3 \div 0,7$ ) КВ відхиляється у легкий бік ротора і його центр мас знаходиться під поперечною віссю обертання – рис. 6.12, в, чи – над, рис. 6.12, г. Лазерний промінь без КВ в АБП описує коло середнього діаметру, а при наявності КВ – коло, діаметр якого у  $6 \div 7$  разів менший – рис. 6.13, б, причому 6 відповідає в'язкому мастилу, а 7 – рідкому.

При максимальному дисбалансі, який може зрівноважити АБП ( $S=1$ ) КВ максимально відхиляється у легкий бік ротора - рис. 6.12, д. Лазерний промінь без КВ в АБП описує коло великого діаметру, а при наявності КВ – коло, діаметр якого у  $6\div 7$  разів менший – рис. 6.13, в, причому 6 відповідає в'язкому мастилу, а 7 – рідкому.

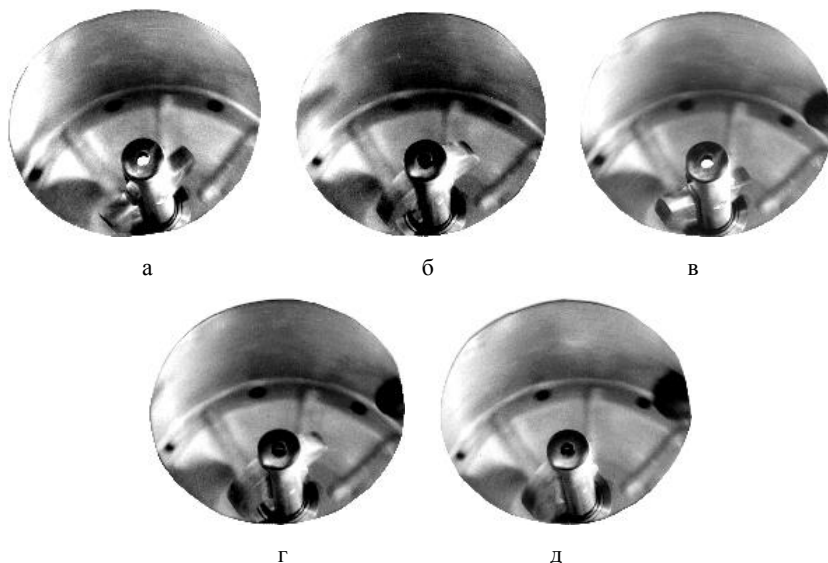


Рис. 6.12. Фотографії зрівноваження АБП різних дисбалансів

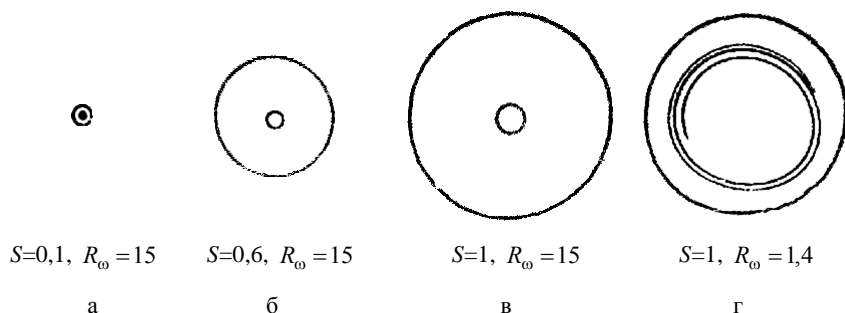


Рис. 6.13. Фотографії слідів лазерного променя на екрані

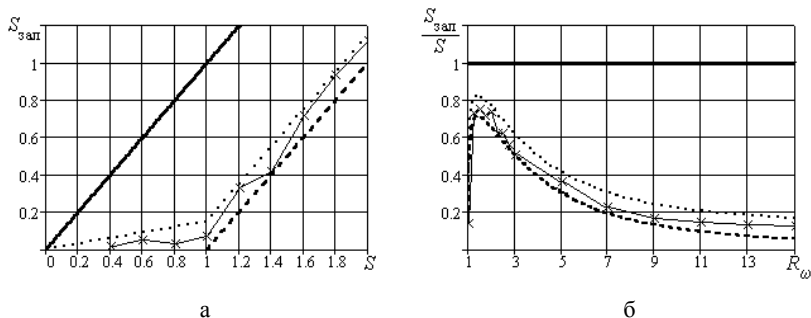
На кутових швидкостях, що більші в  $1,4\div 1,5$  разів за резонансну, спостерігається найбільший залишковий дисбаланс, який складає  $0,75\div 0,8$  від початкового (рис. 6.13, г – при вибігу ротора невелике коло

перейшло у спіральну криву). Це викликано значним впливом сил ваги на положення КВ на невеликих швидкостях обертання ротора. Якість зрівноваження ротора зростає із зростанням кутової швидкості обертання ротора (долається вплив сил ваги), але при досягненні швидкістю обертання  $8\div 9$  критичних швидкостей це практично припиняється.

На рис. 6.14, а наведена оцінка зверху і знизу залишкового дисбалансу для ротора, який швидко обертається ( $R_{\omega} = 15$ ). Аналітично залишковий дисбаланс зверху обмежує

$$S_{\text{зал}}^{(\max)} = \begin{cases} S/(6 \div 7), & S \leq 1; \\ (S-1) + 1/(6 \div 7), & S > 1, \end{cases} \quad (6.192)$$

де  $S$  – поточний безрозмірний дисбаланс і  $6$  відповідає в'язкому мастилу, а  $7$  – рідкому. Крива знизу відповідає ідеальній роботі АБП.



- - АБП не працює;
- ... - обмеження дисбалансу зверху;
- - - - обмеження дисбалансу знизу;
- x- - експериментальна крива.

Рис. 6.14. Ефективність зрівноваження ротора

На рис. 6.14, б наведена оцінка зверху і знизу залишкового дисбалансу в залежності від кутової швидкості обертання ротора ( $R_{\omega}$ ). Аналітично оцінка зверху складає

$$S_{\text{зал}}^{(\max)} = \begin{cases} S_{\text{зал}}^{(\text{теор})} + S/(6 \div 7), & S \leq 1; \\ S_{\text{зал}}^{(\text{теор})} + 1/(6 \div 7), & S > 1, \end{cases} \quad (6.193)$$

де в (6.193) такі ж позначення, що і в (6.192) і  $S_{\text{зал}}^{(\text{теор})}$  – залишковий дисбаланс, який повинен залишатися теоретично (6.40) – на рис. 6.14 це крива знизу.

За результатами описаних і решти випробувань зроблені наступні висновки.

1. На дорезонансних швидкостях обертання ротора АБП збільшує відхилення вала від осі обертання, а на зарезонансних – зменшує.

2. На дорезонансних швидкостях обертання ротора процеси розгону і гальмування ротора без АБП більш спокійні, ніж з АБП, а на зарезонансних – навпаки.

3. Якість зрівноваження ротора зростає із зростанням швидкості обертання ротора до  $8 \div 9$  зарезонансних швидкостей, а далі практично не змінюється.

4. Якщо балансувальної ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора, то:

- основний рух, у якому центр мас КВ нижче поперечної осі ротора, стійкий на зарезонансних швидкостях обертання, а на дорезонансних - нестійкий;
- основний рух, у якому центр мас КВ вище поперечної осі - стає стійким на швидкостях, що набагато (у  $5 \div 7$  разів) перевищують резонансну швидкість обертання;
- побічні рухи, у яких центри мас КВ найбільше відхилені у важкий чи легкий бік ротора, стійкі на дорезонансних швидкостях і нестійкі на зарезонансних;
- на великих швидкостях обертання ротора залишковий дисбаланс не перевищує  $1/(6 \div 7)$  від початкового, причому 6 відповідає в'язкому мастилу, а 7 – рідкому.

5. Якщо балансувальної ємності АБП не вистачає для зрівноваження ротора, то:

- основний рух, в якому КВ найбільш відхилений у легкий бік ротора, стійкий на зарезонансних швидкостях обертання ротора, а на дорезонансних - нестійкий;
- побічний рух, у якому центр мас КВ найбільше відхилений у важкий бік ротора, стійкий на дорезонансних швидкостях і нестійкий на зарезонансних;
- на великих швидкостях обертання ротора залишковий дисбаланс не перевищує  $(S-1)+1/(6 \div 7)$ , де  $S$  – безрозмірний початковий дисбаланс, 1 – балансувальна ємність АБП, і 6 відповідає в'язкому мастилу, а 7 – рідкому.

6. Побічні рухи, у яких центри мас КВ на повздовжній осі ротора, завжди нестійкі і тому не спостерігаються.

7. АПБ зрівноважує змінний дисбаланс, причому при закиданні в ротор дискретних мас швидкість перехідних процесів обернено пропорційна кутовій швидкості обертання ротора, а при неперервній зміні (засипанні піску) - перехідні процеси майже непомітні.

8. Бічний чи торцевий тиск на ротор сприймається як збільшення жорсткості опор і призводить до збільшення резонансної швидкості.



9. На великих швидкостях обертання ротора на процес балансування не впливає орієнтація ротора.

## Висновки розділу 6

Для АБП, у якого КВ повертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора, уперше одержані такі найбільш істотні результати.

а) У рамках моделі ротора, що розташований вертикально, рухається плоскопаралельно, утримується ізотропними в'язкопружними опорами і статично зрівноважується АБП, динаміку системи описує система чотирьох звичайних автономних нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, яка залежить від дванадцяти розмірних або восьми незалежних безрозмірних параметрів.

б) У випадку дисбалансів, які може зрівноважити АБП, система має до шести істотно відмінних усталених рухів – два основних, у яких ротор найбільше зрівноважений і чотири побічних, в яких ротор розбалансований. В першому основному русі центр мас КВ нижче, а в другому - вище точки підвісу. Побічні рухи діляться на дві групи: у першій – КВ найбільше відхилений у важкий чи легкий бік ротора; у другій – центр мас КВ на поздовжній осі ротора над чи під точкою підвісу. Побічні рухи другої групи існують завжди, а на області існування решти усталених рухів впливають сили зовнішнього опору, сили ваги, швидкість обертання ротора. У випадку дисбалансів, які не може зрівноважити АБП, система має один основний і три побічних усталених рухи. Побічні рухи діляться на дві групи: у першій – КВ найбільше відхилений у важкий бік ротора; у другій – центри мас КВ на поздовжній осі ротора під чи над точкою підвісу. Необхідною умовою настання автобалансування є стійкість на робочому інтервалі кутових швидкостей обертання ротора принаймні одного основного руху і нестійкість, або не існування побічних.

в) У випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора, автобалансування відбувається на зарезонансних швидкостях обертання ротора, причому при дисбалансах, які може зрівноважити пристрій, асимптотично стійким є основний рух, у якому центр мас КВ нижче точки підвісу, а решта рухів - нестійка. Автобалансування відбуватиметься і у випадку ротора, який швидко обертається, причому, якщо ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора, стійкими є два основних усталених рухи, а решта є нестійкими.

г) Теоретично встановлено, що при дисбалансах, які може зрівноважити АБП, у системи ротор-АБП існують однопараметричні сім'ї квазіперіодичних рухів, у яких КВ обертаються відносно землі майже із сталою кутовою швидкістю і відстають від ротора, а повздовжня

вісь ротора рухається по гіпоциклоїді, яка є сумою прямої прецесії з цією частотою і прямої нутації з частотою обертання ротора. Области існування цих рухів зменшуються із зростанням сил в'язкого опору, та для КВ, які більш чутливі до сил ваги. При нехтуванні силами ваги встановлено:

- серед усіх сімей квазіперіодичних рухів асимптотично стійкі рухи тільки тієї сім'ї, у якій КВ обертаються відносно землі із швидкістю, близькою, але дещо меншою за резонансну, причому рухи сім'ї стійкі у області власного існування;
- ця сім'я існує на швидкостях обертання ротора, менших за  $R_{\text{ол}}^*$  з (6.130) і область існування зменшується із збільшенням сил в'язкого опору в системі;
- області стійкості квазіперіодичних і основних рухів можуть перетинатися, у зв'язку з чим необхідною умовою настання автобалансування на певних швидкостях обертання ротора є неіснування чи нестійкість згаданої вище сім'ї квазіперіодичних рухів.

д) Досліджена ефективність зрівноваження ротора. На дорезонансних швидкостях обертання ротора, крім навіколорезонансних, пристрій збільшує відхилення вала від осі обертання, а на зарезонансних – зменшує. Повному зрівноваженню дисбалансу заважають сили ваги, але їх вплив зменшується із зростанням кутової швидкості обертання ротора. При великій чутливості КВ до сил ваги ( $R_g \sim 1$ ) останні помітно долаються на швидкостях, що у п'ять і більше разів перевищують резонансну частоту обертання ротора.

е) На універсальному стенді досліджена динаміка дослідної моделі АБП у різних режимах руху ротора і при зрівноваженні різних дисбалансів. Підтверджено настання автобалансування на зарезонансних швидкостях обертання ротора. Встановлено, що сили ваги перешкоджають виникненню квазіперіодичних рухів і цим відіграють стабілізуючу роль. Підтверджено, що у основних рухів різні критичні швидкості, причому основний рух, у якому центр мас КВ вище точки підвісу, стійкий тільки на великих зарезонансних швидкостях, а рух, у якому центр мас КВ нижче точки підвісу, стійкий на всьому діапазоні зарезонансних швидкостей. На великих швидкостях обертання ротора спостерігалось зменшення початкового дисбалансу в 5-6 разів – причому 5 відповідає в'язкому, а 6 - рідкому мастилу. На швидкостях обертання ротора, які у 1÷8 разів перевищують резонансну швидкість, спостерігається чутливість КВ до сил ваги. Подальше збільшення швидкості обертання ротора майже не впливає на положення КВ і не покращує якість зрівноваження ротора.

## РОЗДІЛ 7. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ З ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ІНШИХ ТИПІВ НЕКЛАСИЧНИХ АБП

### 7.1. Динаміка неklasичних АБП, не чутливих до сил ваги

Викладаються основні результати робіт [90-102], присвячених зменшенню чутливості КВ в неklasичних АБП до сил ваги, дослідженню принципів конструювання відповідних пристроїв, теоретичному і експериментальному дослідженню їх динаміки. Дослідження виконані Ю.А.Невдахою за участю і під науковим керівництвом автора. Результати досліджень доповнені теорією квазіперіодичних рухів.

#### 7.1.1. Принципи конструювання неklasичних АБП, нечутливих до сил ваги

Недоліком АБП, у яких КВ повертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора, є чутливість КВ до сил ваги (розділ 6: п. 6.4 - рис. 6.9; п. 6.6 - рис. 6.12, б). Це знижує якість балансування ротора, особливо на швидкостях, що у 1÷8 разів перевищують резонансну. З метою усунення чутливості КВ до сил ваги в роботах [91,92] вперше запропоновано:

- у вертикально розташованому роторі встановлювати два однакових КВ і накладати на їх рухи в'язі, що дозволяють їм повертатися навколо поперечних осей на рівні кути у протилежні боки;
- у довільно розташованому роторі встановлювати два однакових КВ і накладати на їх рухи в'язі, які дозволяють їм повертатися навколо поперечних осей на рівні кути в один бік.

У першому варіанті АБП може зрівноважити статичний дисбаланс у площині, яка перпендикулярна повздовжній осі ротора і проходить через спільний центр мас КВ. У другому варіанті АБП може зрівноважити динамічний (моментний) дисбаланс ротора.

Виділені ознаки, комбінаціями яких створюються АБП.

За першу ознаку АБП обраний вид КВ. Вона позначена через AN, де N=1,...7 - номер КВ з рис. 2.4.

За другу ознаку прийнятий спосіб створення КВ: 1 - важке тіло; 2 - поплавок у мастилі; 3 - отвір у суцільному тілі. Вона позначена як BN, де N=1,2,3 - спосіб створення.

За третю ознаку прийнятий спосіб розміщення АБП: 1 - усередині порожнистого вала чи ротора; 2 - у балансувальній голівці, що нагвинчується на вал; 3 - на валу у вигляді насадки. Вона позначена як CN, де N=1,2,3 - номер, що відповідає способу розміщення.

За четверту ознаку прийнятий вид дисбалансу, який може зрівноважити АБП: 1 - статичний; 2 - динамічний (моментний); 3 - повний (статичний і динамічний). Вона позначена як DN, де N=1,2,3 - номер, що відповідає виду дисбалансу.

За п'яту ознаку прийнята степінь заповнення корпусу АБП рідиною: 1 – рідини немає; 2 – часткове; 3 – повне. Вона позначена як EN, де N=1,2,3 - номер, що відповідає степені заповнення корпусу рідиною.

Виділені ознаки зібрані у табл. 7.1. При її застосуванні слід мати на увазі, що комбінація певних ознак неможлива.

Таблиця 7.1

Ознаки, комбінаціями яких створюються АБП, не чутливі до сил ваги

№	Вид КВ AN <sub>к</sub>	Спосіб утворення КВ, BN <sub>к</sub>	Розміщення АБП, С№	Який дисба- ланс зрівнова- жується, DN <sub>к</sub>	Заповнення корпусу рі- диною, EN <sub>к</sub>
1	№ КВ	Масивне тіло	Усередині порожнистого ротора чи вала	Статичний	Рідини немає
2		Поплавок у мастилi	Балансувальна го- лівка, що нагвин- чується на вал	Динамічний (моментний)	Часткове
3		Отвори у суцільному тілі	На валу ротора	Повний (статичний і динамічний)	Повне

На рис. 7.1 наведені приклади синтезу різних схем некласичних АБП, нечутливих до сил ваги. Наприклад, на рис. 7.1, а зображений АБП, створений комбінаціями ознак: А1 - КВ у вигляді з'єднаних під прямим кутом двох маятників; В1 - КВ виконаний у вигляді важкого тіла; С3 - АБП розміщений на валу ротора; D1 - пристрій зрівноважує статичний дисбаланс; E1 – рідини немає.

На рис. 7.2 зображені графіки залежності відношення залишкового дисбалансу  $s_{\text{зал}}$  до початкового  $s$  від відношення кутової швидкості обертання ротора до резонансної частоти, позначене через  $R_{\omega}$ . Графіки побудовані для: непрацюючих АБП, у яких КВ в нейтральному положенні (пряма 1); АБП - прототипів, в яких використані різні некласичні КВ (криві 2-4); нового АБП (пряма - 5). Видно, що якщо на зарезонансних швидкостях обертання ( $R_{\omega} > 1$ ) буде відбуватися явище автобалансування, то нові АБП теоретично будуть повністю усувати статичний дисбаланс ротора на всьому діапазоні зарезонансних кутових швидкостей обертання ротора.

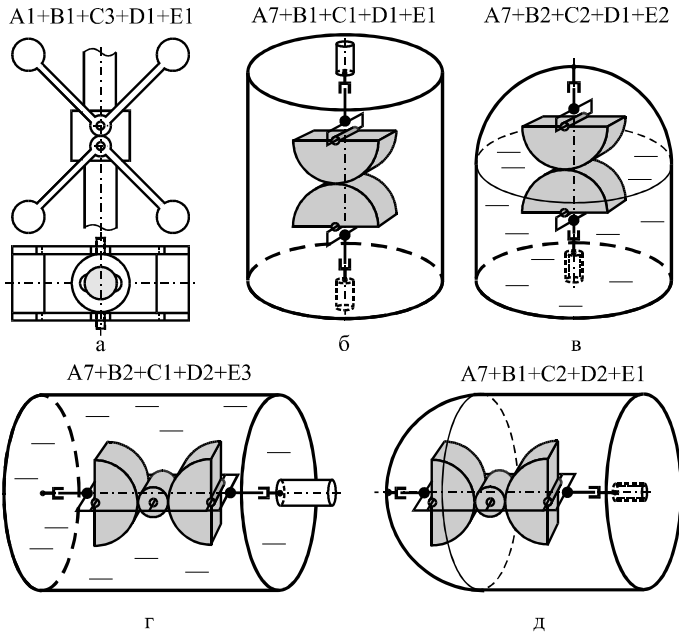


Рис. 7.1. Приклади синтезу некласичних АБП, нечутливих до сил ваги

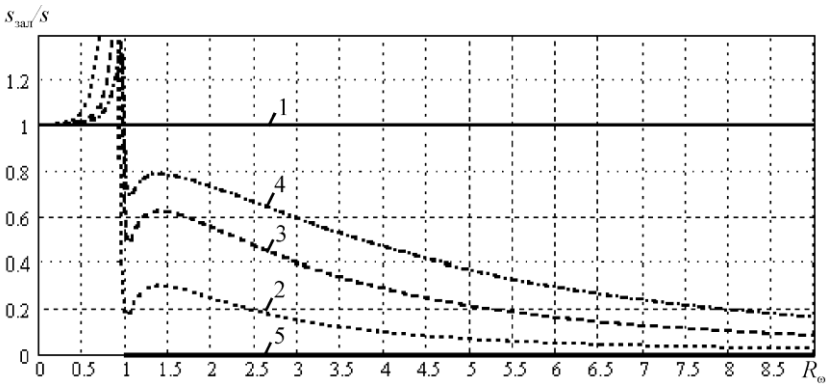


Рис. 7.2. Залежність залишкового дисбалансу для АБП - прототипів і АБП, нечутливого до сил ваги, від кугової швидкості обертання ротора:

- 1 - АБП не працюють і КВ в нейтральному положенні;
- 2 - АБП - прототип з КВ №1, 2;
- 3 - АБП - прототип з КВ №3-5;
- 4 - АБП - прототип з КВ №6,7;
- 5 - АБП, нечутливий до сил ваги

Також видно, що якість зрівноваження ротора новими АБП буде істотно вища за якість зрівноваження ротора АБП-прототипом на швидкостях, що у 1÷8 разів перевищують резонансну швидкість. Розглянемо область можливого використання пристроїв.

На рис. 7.3 показана схема відцентрової сепарації, в якій технологічна рідина подається в ротор знизу через порожнистий вал. Такі сепаратори – пурифікатори серії РХ випускає, наприклад, швейцарська фірма Alfa Laval, і вони призначені для очищення масел від води і осаду, сепарації різноманітних вибухонебезпечних сумішей, сепарації молока тощо. Сепаратори подібної конструкції, призначені для очищення нафти від води, стічних вод від осаду і т.п. випускають інші, у тому числі вітчизняні виробники.

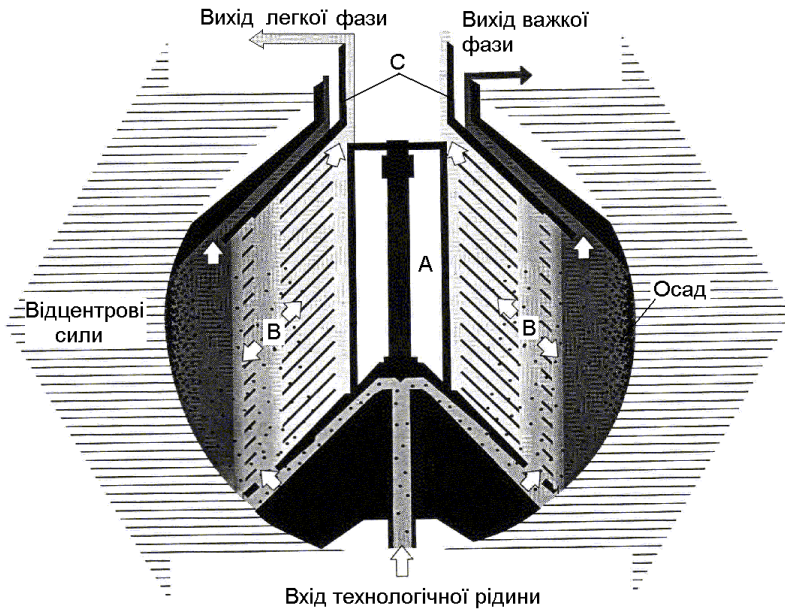


Рис. 7.3. Схема відцентрової сепарації з подачею технологічної рідини знизу через порожнистий вал:

- А – місце, що технологічно не використовується;
- В – область розділу фаз; С – тарілка розділу фаз

Вказані типи сепараторів працюють неперервно, чи періодично зупиняються для перезавантаження чи очищення. Вони можуть обробляти 30-1000 тон технологічної рідини за годину. Частота обертання ротора сепаратора – зарезонансна і складає 450-10000 обертів

за хвилину. В конструкцію сепаратора входить блок аварійної зупинки при перевищенні вібраціями допустимих меж. Вібрації викликаються дисбалансами від нерівномірного розподілення рідини чи осаду усередині ротора сепаратора, а також порушенням рівномірності розподілу осаду під час його автоматичного скидання без зупинки сепаратора. Наявність вібрацій, викликаних виконанням сепаратором технологічних функцій, є загальним недоліком його конструкції і роботи.

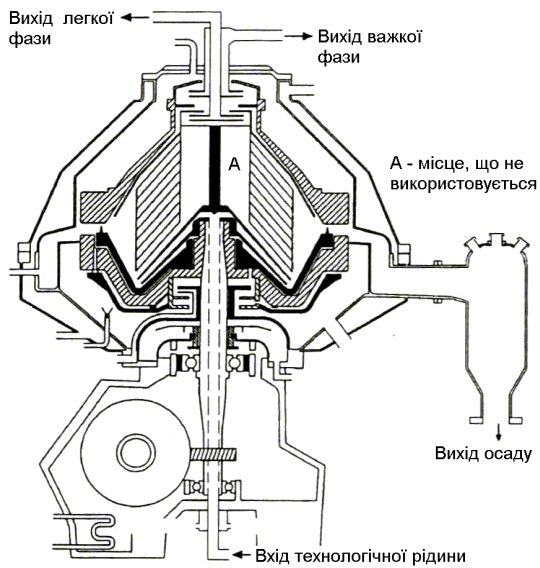
З схеми відцентрової сепарації видно, що у конструкції сепаратора існує вільне місце А, що технологічно не використовується. Воно має форму циліндра, розташованого співосно осі вала ротора. У ньому рекомендується розташовувати розроблені АБП.

На рис. 7.4 приведені схеми сепараторів серії РХ до установки АБП – а, і після – б.

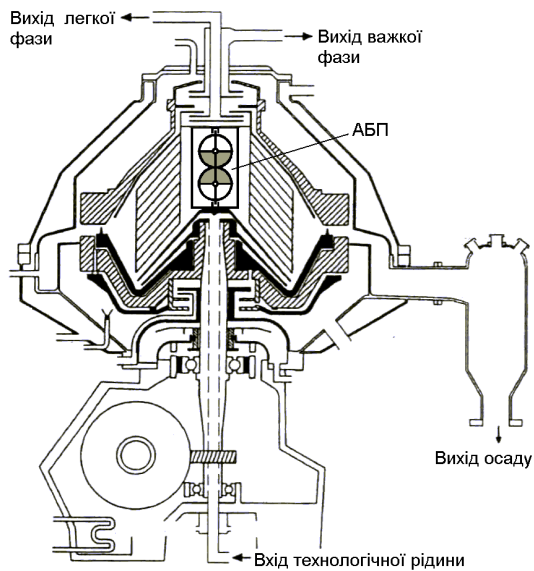
Встановлення в сепаратор АБП зменшить вібрації і шум, що виникають під час його роботи. Це особливо актуально для режиму викидання з сепаратору осаду. Останній є твердою фракцією, яка періодично видаляється з сепаратора без припинення його роботи. Без АБП це призводить до різкого збільшення вібрацій і навіть до аварійної зупинки ротора сепаратора.

На рис. 7.5 зображені схема і фотографії АБП, розробленого для зрівноваження центрифуги напівавтоматичної пральної машини [90]. Схема на рис. 7.5, а і фотографія на рис. 7.5, б ілюструють ефективність використання АБП внутрішнього простору центрифуги. Фотографії на рис. 7.5, в-д ілюструють ефективність використання КВ внутрішнього простору корпусу АБП. Такий АБП може бути використаний для зрівноваження будь-якого екстрактора, сепаратора, центрифуги, за умови, що простір поблизу осі обертання в їх роторах не використовується.

В роботі [92] запропоновано виконувати один КВ дещо меншою масою за інший. Це призведе до того, що під час пуску ротора КВ будуть у нейтральному положенні, що забезпечить спокійний розбіг. Але при цьому КВ будуть дещо чутливі до сил ваги. В роботі [93] запропоновано частково заповнювати корпус АБП рідиною. Завдяки цьому КВ при нерухомому роторі будуть приходити у нейтральне положення, бо нижній КВ буде занурений у рідину і на нього буде діяти архімедова сила. Це забезпечить спокійний розбіг і вибіг ротора.



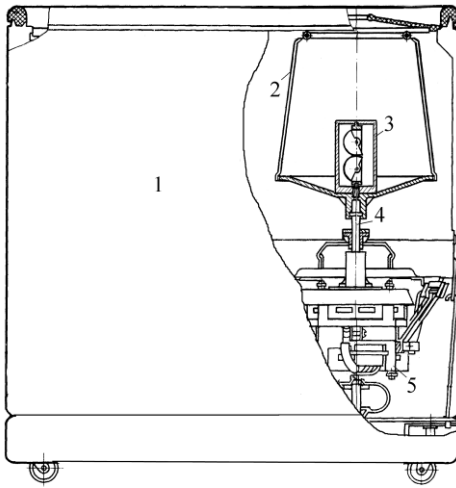
а



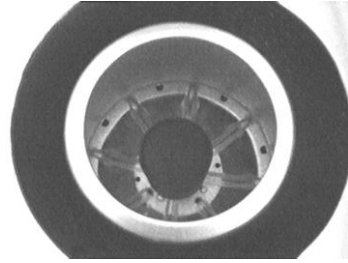
б

Рис. 7.4. Схеми сепараторів серії РХ:  
а – без АБП; б – з АБП

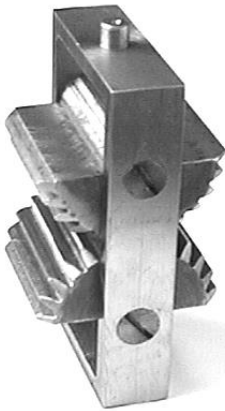




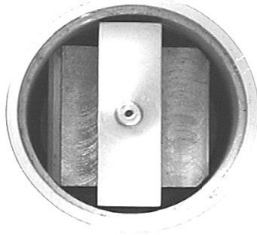
а



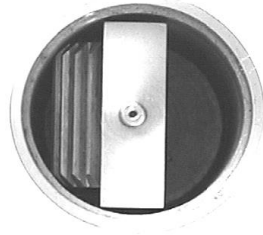
б



в



г



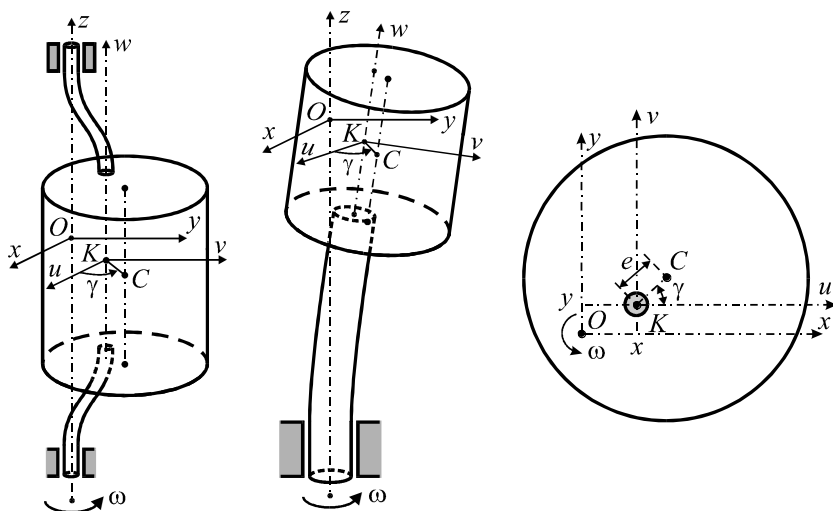
д

Рис. 7.5. АБП із зв'язаними КВ для зрівноваження центрифуги напівавтоматичної пральної машини типу СМІ:

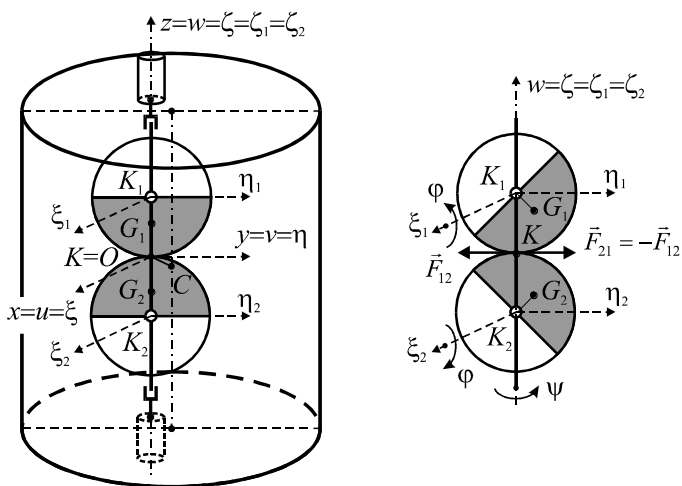
1 – корпус машини; 2 – центрифуга; 3 – АБП; 4 – вал; 5 – двигун

## 7.1.2. Основні результати теоретичних досліджень

Побудована математична модель ротора і нового АБП (рис. 7.6).



а



б

Рис. 7.6. До побудови математичної моделі ротора і АБП із зв'язаними КВ:  
а - схема ротора і дисбалансу; б - схема АБП

Вертикально розташований ротор рухається плоскопаралельно. Його утримують ізотропні в'язкопружні опори. Ротор обертається із сталою кутовою швидкістю  $\omega$ , разом з рухомими осями  $Oxuz$ , відносно яких описується рух ротора. Вісь  $z$  співпадає з віссю обертання, і точка  $O$  знаходиться на рівні спільного центра мас КВ. Паралельно осям  $Oxuz$  розташовані допоміжні осі  $Kuvw$ , жорстко зв'язані з ротором, причому вісь  $w$  співпадає з віссю вала ротора. При відсутності відхилення вала від осі обертання точки  $K$  і  $O$  співпадають. Відносно осей  $Kuvw$  центр мас ротора має координати  $(e\cos\gamma, e\sin\gamma, 0)$ , де  $e$  - ексцентриситет,  $\gamma$  - кут, що визначає напрям вектора дисбалансу. Положення КВ відносно ротора визначаються двома кутами  $\varphi, \psi$  (рис. 7.6, б). При повороті КВ навколо поперечних осей виникає сумарний момент в'язкого опору  $-2H_1\dot{\varphi}$ , де  $H_1$  - коефіцієнт в'язкого опору,  $\dot{\varphi}$  - кутова швидкість обертання КВ навколо поперечних осей. Аналогічний момент  $-2H_2\dot{\psi}$  виникає при обертанні КВ навколо поздовжньої осі ротора. Коли вал відхиляється від осі обертання на  $\mathbf{r}=\mathbf{OK}$ , на нього починають діяти поновлююча сила  $-c\mathbf{r}$  і сила в'язкого опору  $-H_3\mathbf{v}$ , де  $c$  - жорсткість,  $H_3$  - коефіцієнт в'язкого опору,  $\mathbf{v}=\mathbf{dr}/dt$  - абсолютна швидкість осі вала ротора (точки  $K$ ). Система ротор-АБП має чотири степеня вільності, її динаміку описує система чотирьох звичайних нелінійних автономних диференціальних рівнянь другого порядку, яка містить дванадцять розмірних параметрів:

$$M, c, \omega, m, A, B, l, H_1, H_2, H_3, e, \gamma. \quad (7.1)$$

У безрозмірному вигляді рівняння динаміки мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + h_1\dot{\varphi} - [(\ddot{\xi} - 2R_\omega\dot{\eta} - R_\omega^2\xi)\sin\psi - (\ddot{\eta} + 2R_\omega\dot{\xi} - R_\omega^2\eta)\cos\psi]\cos\varphi &= 0, \\ (\ddot{\psi} + h_2\dot{\psi})R_p^2 - [(\ddot{\xi} - 2R_\omega\dot{\eta} - R_\omega^2\xi)\cos\psi + (\ddot{\eta} + 2R_\omega\dot{\xi} - R_\omega^2\eta)\sin\psi]\sin\varphi &= 0, \\ \ddot{\xi} - 2R_\omega\dot{\eta} - R_\omega^2\xi + H(\dot{\xi} - R_\omega\eta) + \xi - R_m\{[\dot{\varphi}\sin\psi + 2(R_\omega + \dot{\psi})\dot{\varphi}\cos\psi]\cos\varphi + \\ + [\dot{\psi}\cos\psi - (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_\omega\dot{\psi})\sin\psi]\sin\varphi + R_\omega^2(e_0\cos\gamma - \sin\varphi\sin\psi)\} &= 0, \\ \ddot{\eta} + 2R_\omega\dot{\xi} - R_\omega^2\eta + H(\dot{\eta} + R_\omega\xi) + \eta - R_m\{[\dot{\psi}\sin\psi + (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_\omega\dot{\psi})\cos\psi]\sin\varphi - \\ - [\dot{\varphi}\cos\psi - 2(R_\omega + \dot{\psi})\dot{\varphi}\sin\psi]\cos\varphi + R_\omega^2(e_0\sin\gamma + \sin\varphi\cos\psi)\} &= 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

де

$$\xi = \frac{x}{\rho_1}, \quad \eta = \frac{y}{\rho_1}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}\right), \quad (7.3)$$

- безрозмірні змінні;

$$R_m = \frac{ml^2}{M_\Sigma \rho_1^2}, \quad R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad R_p = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad h_{1/2} = \frac{H_{1/2}}{m\rho_{1/2}^2\omega_0},$$

$$H = \frac{H_3}{M_\Sigma \omega_0}, \quad e_0 = \frac{Me}{ml}, \quad \gamma. \quad (7.4)$$

- вісім незалежних безрозмірних параметрів. Зауважимо, що параметр  $\gamma$  можна виключити належним вибором початку відліку безрозмірного часу  $\tau$ . В формулах (7.3), (7.4)

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_\Sigma}, \quad \rho_1 = \sqrt{A/m}, \quad \rho_2 = \sqrt{B/m}, \quad (7.5)$$

де  $\omega_0$  - резонансна частота - частота власних коливань ротора при нерухомих відносно ротора КВ, відсутності обертання ротора і без врахування сил опору,  $\rho_{1,2}$  - осьові радіуси інерції КВ, точка над змінною означає похідну по  $\tau$ .

Досліджені усталені рухи системи ротор-АБП. Записані рівняння усталених рухів

$$\begin{aligned} (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) R_\omega^2 \cos \tilde{\varphi} &= 0, \quad (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) R_\omega^2 \sin \tilde{\varphi} = 0, \\ (R_\omega^2 - 1) \tilde{\xi} + HR_\omega \tilde{\eta} + R_m R_\omega^2 (e_0 \cos \gamma - \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi}) &= 0, \\ -HR_\omega \tilde{\xi} + (R_\omega^2 - 1) \tilde{\eta} + R_m R_\omega^2 (e_0 \sin \gamma + \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi}) &= 0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

де  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$  - усталені значення змінних, що визначають положення системи.

Встановлено, що, якщо балансувальної ємності КВ вистачає для зрівноваження дисбалансу

$$e_0 < 1, \quad \varphi_0 = \arcsin e_0, \quad (7.7)$$

у системи (7.6) не більше шести істотно відмінних усталених рухів, у яких КВ обертаються синхронно з ротором. Їх запропоновано розрізнити за граничними положеннями КВ відносно ротора у випадку, коли кутова швидкість обертання ротора необмежено зростає (рис. 7.7):

- $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0$  - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас верхнього КВ нижче точки підвісу (рис. 7.7, а);
- $\tilde{\varphi}_2 = \pi - \varphi_0$  - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас верхнього КВ вище точки підвісу (рис. 7.7, б);
- $\tilde{\varphi}_3 = -\pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилені у важкий бік ротора (рис. 7.7, в);
- $\tilde{\varphi}_4 = \pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилені в легкий бік ротора (рис. 7.7, г);
- $\tilde{\varphi}_5 = 0$  - побічний рух, у якому центр мас верхнього КВ під точкою підвісу (рис. 7.7, д);
- $\tilde{\varphi}_6 = \pi$  - побічний рух, у якому центр мас верхнього КВ над точкою підвісу (рис. 7.7, е).

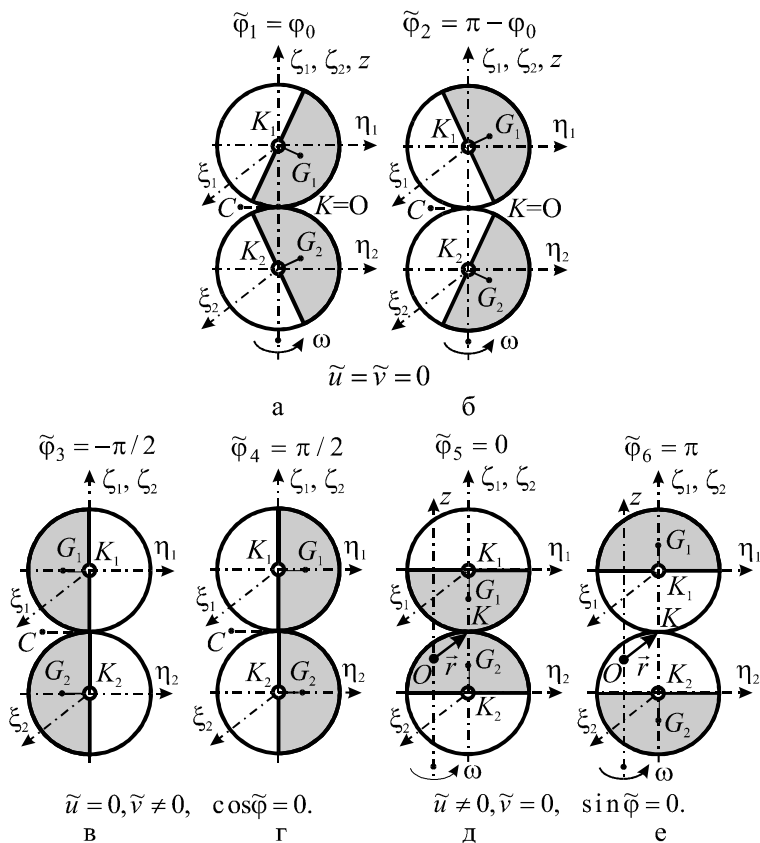


Рис. 7.7. Основні і побічні усталені рухи при дисбалансах, які АБП може зрівноважити ( $e_0 < 1$ ):

- а, б - основні рухи;
- в, г - побічні рухи першої групи;
- д, е - побічні рухи другої групи.

Усталені рухи  $\tilde{\varphi}_{1,2}$ ,  $\tilde{\varphi}_{5,6}$  існують при будь-яких умовах. Побічні рухи  $\tilde{\varphi}_{3,4}$  існують в такому інтервалі кутових швидкостей обертання ротора

$$R_{\omega} \in (0, R_{\omega}^{(1)}) \cup (R_{\omega}^{(2)}, +\infty),$$

$$R_{\omega}^{(1/2)} = \sqrt{1 + \frac{H^2}{4 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \mp \frac{H}{2 \operatorname{tg} \varphi_0}, \quad R_{\omega}^{(1)} < 1 < R_{\omega}^{(2)}. \quad (7.8)$$

Якщо балансувальної ємності КВ не вистачає для зрівноваження дисбалансу

$$e_0 > 1, \quad (7.9)$$

у системи (7.6) чотири істотно відмінні усталені рухи, які запропоновано розрізняти за граничними положеннями КВ відносно ротора, коли кутова швидкість обертання ротора необмежено зростає ( $R_\omega \gg 1$ ) (рис. 7.8):

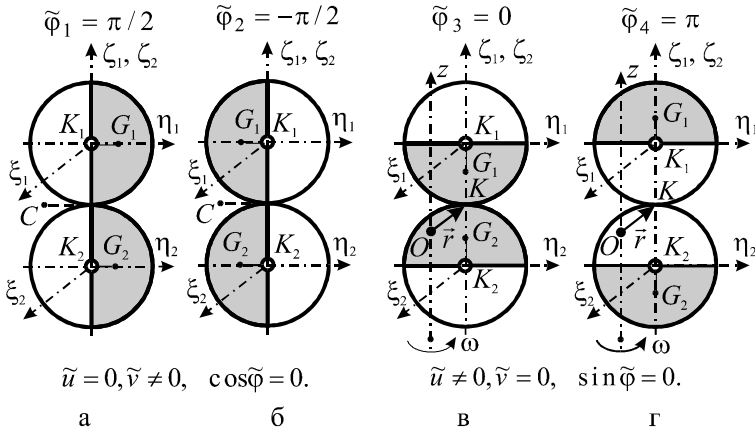


Рис. 7.8 Основний і побічні усталені рухи при дисбалансах, які АБП не може зрівноважити ( $e_0 > 1$ ):

- а - основний рух;
- б - побічний рух першої групи;
- в, г - побічні рухи другої групи.

- $\tilde{\varphi}_1 = \pi/2$  - основний рух, у якому ротор найбільш зрівноважений і КВ відхилені в легкий бік ротора (рис. 7.8, а);
- $\tilde{\varphi}_2 = -\pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилені у важкий бік ротора (рис. 7.8, б);
- $\tilde{\varphi}_3 = 0$  - побічний рух, у якому центр мас верхнього КВ під точкою підвісу (рис. 7.8, в);
- $\tilde{\varphi}_4 = \pi$  - побічний рух, у якому центр мас верхнього КВ над точкою підвісу (рис. 7.8, г).

Умова настання автобалансування: на певному інтервалі кутових швидкостей обертання ротора необхідно, щоб для будь-якого дисбалансу принаймні один основний рух був асимптотично стійким, а побічні – нестійкими.

Досліджена стійкість усталених рухів.

Для основних рухів  $\tilde{\varphi}_{1,2}$  ( $e_0 < 1$ ) введений збурений рух у вигляді

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \quad \xi = \tilde{\xi}, \quad \eta = \tilde{\eta}. \quad (7.10)$$

Одержано характеристичне рівняння

$$\Delta(\lambda) = 4a_{11}\bar{a}_{11}a_{33}a_{44} - 2R_m(a_{33} + a_{44})(a_{11}\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11}a_{13}^2) + 4R_m^2a_{13}^2\bar{a}_{13}^2 = 0, \quad (7.11)$$

де

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \\ a_{33} = (\lambda^2 + h_2\lambda) \frac{R_p^2}{\sin^2 \tilde{\varphi}}, \quad a_{44} = (\lambda^2 + h_1\lambda) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}}, \quad (7.12)$$

і знак комплексного спряження над  $a_{ij}$  до  $\lambda$  не відноситься.

Стійкість чи нестійкість усталених рухів визначалася за дійсними частинами коренів характеристичного рівняння (7.11). При цьому застосовувалися наслідки з теореми Вієта і корені характеристичного рівняння визначалися у вигляді усічених рядів за степенями малих параметрів.

Знайдені коефіцієнти характеристичного рівняння (7.11)

$$\Delta(\lambda) \frac{\sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}{4} = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_8\lambda^8 = 0,$$

$$a_0 = R_m^2 R_\omega^8 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0, \quad a_1 = R_m R_\omega^4 (R_\omega^2 - 1)(h_1 \sin^2 \varphi_0 + h_2 R_p^2 \cos^2 \varphi_0), \dots$$

$$a_8 = (R_p^2 - R_m \sin^2 \varphi_0)(1 - R_m \cos^2 \varphi_0). \quad (7.13)$$

З наслідків теореми Вієта зроблений висновок, що основні рухи можуть бути стійкими тільки на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $|R_\omega| > 1$ ), а на дорезонансних - нестійкі.

Розглянутий випадок, коли маса КВ набагато менша маси ротора

$$R_m \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (7.14)$$

Знайдені корені у нульовому наближенні

$$\lambda_0^{(1/2)} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega, \quad \lambda_0^{(3/4)} = -\frac{H}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega,$$

$$\lambda_0^{(5)} = -h_1, \quad \lambda_0^{(6)} = -h_2, \quad \lambda_0^{(7,8)} = 0. \quad (7.15)$$

Нульові корені  $\lambda^{(7,8)}$  у першому наближенні визначає таке рівняння

$$[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2] R_p^2 h_1 h_2 \lambda^2 + \\ + (h_1 \sin^2 \tilde{\varphi} + h_2 R_p^2 \cos^2 \tilde{\varphi})(R_\omega^2 - 1) R_\omega^4 \lambda + R_\omega^8 \sin^2 \tilde{\varphi} \cos^2 \tilde{\varphi} = 0. \quad (7.16)$$

Умова асимптотичної стійкості основних рухів  $\tilde{\varphi}_{1,2}$  ( $e_0 < 1$ )

$$|R_\omega| > 1. \quad (7.17)$$

Розглянутий випадок, коли ротор швидко обертається

$$R_\omega = 1/\nu, \quad \nu \sim \varepsilon, \quad R_m \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (7.18)$$

Знайдені наступні розкладання коренів

$$\lambda^{(1/2)} \approx -\frac{H}{2} - iR_\omega \left[ 1 \mp v \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} \right], \quad \lambda^{(3/4)} \approx -\frac{H}{2} + iR_\omega \left[ 1 \pm v \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} \right],$$

$$\lambda^{(5/6)} \approx -\frac{h_1}{2} \pm iR_\omega \sqrt{R_m} \cos \tilde{\varphi}, \quad \lambda^{(7/8)} \approx -\frac{h_2}{2} \pm iR_\omega \sqrt{R_m} \frac{\sin \tilde{\varphi}}{R_p}. \quad (7.19)$$

З від'ємності їх дійсних частин зроблений висновок про асимптотичну стійкість основних рухів у розглянутому випадку.

Для побічних рухів  $\tilde{\varphi}_{3,4}$  ( $e_0 < 1$ ), або основного  $\tilde{\varphi}_1$  і побічного  $\tilde{\varphi}_2$  рухів ( $e_0 > 1$ ) введений збурений рух у вигляді

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \quad \xi = \tilde{\xi} + u, \quad \eta = \tilde{\eta} + v. \quad (7.20)$$

Одержано характеристичне рівняння, яке розпалося на два рівняння

$$\lambda^2 + h_1 \lambda - R_m R_\omega^2 b = 0, \quad (7.21)$$

$$a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} - \frac{R_m}{2} (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) - R_m a_{11} \bar{a}_{11} a_{44} = 0. \quad (7.22)$$

де

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2,$$

$$a_{33} = (\lambda^2 + h_2 \lambda) R_p^2, \quad a_{44} = b R_\omega^2, \quad b = \frac{R_\omega^2}{R_\omega^2 - 1} (1 \mp e_0 \sin \tilde{\vartheta}), \quad \tilde{\vartheta} = \tilde{\psi} - \gamma, \quad (7.23)$$

і знак комплексного спряження над  $a_{ij}$  до  $\lambda$  не відноситься.

По рівнянню (7.21) встановлено, що:

- побічні рухи  $\tilde{\varphi}_{3,4}$  ( $e_0 < 1$ ) можуть бути стійкими тільки на дорезонансних швидкостях обертання ротора, а на зарезонансних – нестійкі;
- основний рух  $\tilde{\varphi}_1$  ( $e_0 > 1$ ) може бути асимптотично стійким на зарезонансних швидкостях обертання ротора, а на дорезонансних – нестійкий, а побічний рух  $\tilde{\varphi}_2$  ( $e_0 > 1$ ) – навпаки.

Коли маса КВ набагато менша маси ротора ( $R_m \ll 1$ ), отримані наступні розкладання коренів характеристичного рівняння (7.22)

$$\lambda^{(3/4)} \approx -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega, \quad \lambda^{(5/6)} \approx -\frac{H}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega,$$

$$\lambda^{(7)} \approx -h_2, \quad \lambda^{(8)} \approx \frac{R_m (R_\omega^2 - 1) R_\omega^4}{[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2] R_p^2 h_2} - \frac{R_m b R_\omega^2}{R_p^2 h_2}. \quad (7.24)$$

По них встановлено, що:



- побічні рухи  $\tilde{\varphi}_{3,4}$  ( $e_0 < 1$ ), за умови існування, асимптотично стійкі на дорезонансних швидкостях обертання ротора;
- основний рух  $\tilde{\varphi}_1$  ( $e_0 > 1$ ) асимптотично стійкий на зарезонансних швидкостях обертання ротора, а на дорезонансних - нестійкий, а побічний рух  $\tilde{\varphi}_2$  ( $e_0 > 1$ ) - навпаки.

При швидкому обертанні ротора ( $R_\omega \gg 1$ ), для основного руху  $\tilde{\varphi}_1$  ( $e_0 > 1$ ) знайдені такі розкладання коренів характеристичного рівняння (7.22)

$$\lambda^{(3/4)} \approx -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2 - iR_\omega}, \quad \lambda^{(5/6)} \approx -\frac{H}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega,$$

$$\lambda^{(7/8)} \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{h_2 R_p^2 + H R_m}{R_p^2 - R_m} \pm i R_\omega \sqrt{\frac{R_m e_0}{R_p^2 - R_m}}, \quad (7.25)$$

і встановлено, що основний рух  $\tilde{\varphi}_1$  ( $e_0 > 1$ ) асимптотично стійкий.

Для побічних рухів  $\tilde{\varphi}_{5,6}$  ( $e_0 < 1$ ), або  $\tilde{\varphi}_{3,4}$  ( $e_0 > 1$ ) введений збурений рух у вигляді (7.20) і знайдене характеристичне рівняння у вигляді

$$\Delta(\lambda) = a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} - \frac{R_m}{2} (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) a_{44} - R_m^2 a_{11} \bar{a}_{11} a_{34}^2 = 0. \quad (7.26)$$

де

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \quad a_{33} = \lambda^2 + h_1 \lambda,$$

$$a_{34} = \frac{R_\omega^2 e_0}{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \quad a_{44} = (\lambda^2 + h_2 \lambda) R_p^2, \quad (7.27)$$

в (7.26) знак комплексного спряження над  $a_{ij}$  до  $\lambda$  не відноситься.

Знайдені коефіцієнти характеристичного рівняння (7.26)

$$\Delta(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_8 \lambda^8 = 0,$$

$$a_0 = -R_m^2 R_\omega^8 e_0^2, \dots, a_8 = (1 - R_m) R_p^2. \quad (7.28)$$

З наслідків теореми Вієта випливає, що побічні рухи  $\tilde{\varphi}_{5,6}$  ( $e_0 < 1$ ), або  $\tilde{\varphi}_{3,4}$  ( $e_0 > 1$ ) завжди нестійкі.

За результатами теоретичних досліджень зроблені висновки, що - при дисбалансах, які АБП може зрівноважити ( $e_0 < 1$ ):

1) на дорезонансних швидкостях обертання ротора таких, що  $0 < R_\omega < R_\omega^{(1)}$ , у випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора, асимптотично стійкі побічні рухи  $\tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4$ , а решта рухів нестійка;

2) на дорезонансних швидкостях обертання ротора таких, що

$R_{\omega}^{(1)} < R_{\omega} < 1$  всі існуючі усталені рухи нестійкі;

3) на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_{\omega} > 1$ ), коли маса КВ набагато менша маси ротора ( $R_m \ll 1$ ), або ротор швидко обертається ( $R_{\omega} \gg 1$ ), асимптотично стійкі основні усталені рухи  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ , а решта рухів нестійка,

- при дисбалансах, які АБП не може зрівноважити ( $e_0 > 1$ ):

1) на дорезонансних швидкостях обертання ротора ( $0 < R_{\omega} < 1$ ), коли маса КВ набагато менша маси ротора, асимптотично стійкий побічний рух  $\tilde{\varphi}_2$ , а решта рухів нестійка;

2) на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $R_{\omega} > 1$ ), коли маса КВ набагато менша маси ротора ( $R_m \ll 1$ ), або ротор швидко обертається ( $R_{\omega} \gg 1$ ) асимптотично стійкий основний усталений рух  $\tilde{\varphi}_1$ , а решта рухів нестійка,

- при будь-яких дисбалансах:

1) основні рухи можуть бути стійкими тільки на зарезонансних швидкостях обертання ротора, а на дорезонансних - нестійкими;

2) побічні рухи першої групи можуть бути стійкими тільки на дорезонансних швидкостях обертання ротора, а на зарезонансних – нестійкими;

3) побічні рухи другої групи завжди нестійкі,

4) якщо маса КВ набагато менша маси ротора, АБП працездатний на зарезонансних швидкостях обертання ротора;

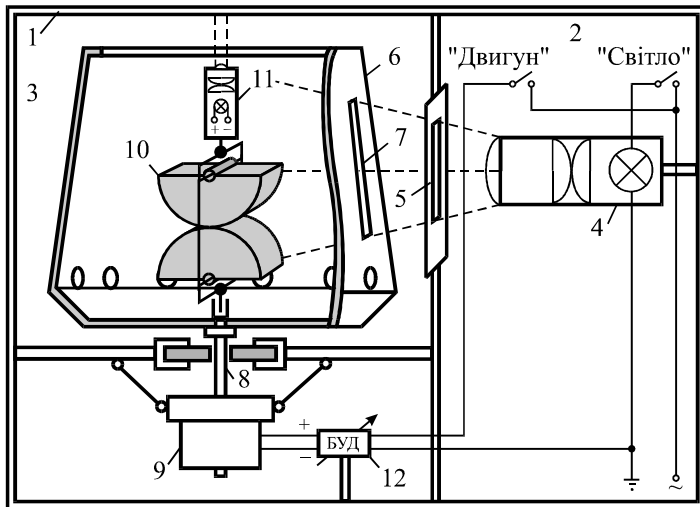
5) АБП працездатний у випадку ротора, який швидко обертається;

6) для встановлення працездатності АБП в інших випадках достатньо дослідити стійкість основних рухів.

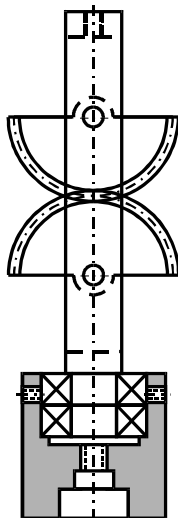
### 7.1.3. Основні результати експериментальних досліджень

Створені дві дослідні моделі АБП із зв'язаними КВ і експериментально досліджена їх працездатність на універсальному стенді. Досліджено: зрівноваження АБП різних дисбалансів, швидкість і якість балансування; різні усталені рухи системи ротор-АБП; режими розгону, крейсерського руху і вибігу ротора; реакція АБП на зміну дисбалансу ротора і на збуджуючі сили різного походження. Робота АБП із зв'язаними КВ порівняна з роботою АБП-прототипу.

На рис. 7.9 приведені схема стенда і схема та фотографія АБП із зв'язаними КВ. Опис стенда і методики проведення досліджень у розділі 4.



а



б



в

Рис. 7.9. Дослідження динаміки АБП зі зв'язаними КВ на універсальному стенді:  
а – схема стенда; б – схема АБП; в – фотографія АБП

Параметри системи такі:

$$M = 6,24 \text{ кг}, \quad m = 0,15 \text{ кг}, \quad \omega_0 = 3,33 \text{ об/с}, \quad (7.29)$$

де  $M$  - сумарна маса обертових частин (центрифуги, АБП);  $m$  - маса одного КВ;  $\omega_0$  - резонансна частота. Два дослідних зразки АБП мають однакову балансувальну ємність  $S_{\text{АБП}} = 440 \text{ гр} \cdot \text{см}$  (як у АБП-прототипа), і у першого - однакові КВ, а у другого - нижній КВ має меншу масу.

**Зрівноваження АБП різних дисбалансів.** При наявності сил в'язкого опору (підшипники змазані шаром мастила) КВ швидко втягуються в обертання разом із ротором і балансування настає за мінімальний проміжок часу 2-4 секунди, навіть під час розгону ротора (рис. 7.10). Однак чутливість КВ до зміни дисбалансу тим менша, чим більша в'язкість мастила. У момент пуску ротора його коливання разом із КВ більш значні, ніж без них. При вибігу ротора КВ залишаються в положенні, у якому зрівноважують ротор аж до резонансної швидкості обертання ротора, а часто і до менших швидкостей і навіть до повної зупинки ротора. Причому чим більша в'язкість мастила, тим довше КВ залишаються в положенні, у якому зрівноважують ротор. Пояснюється це в'язкістю мастила, а не можливістю балансування ротора на дорезонансних швидкостях.

На рис. 7.11 показані сліди променя лазера на горизонтальному екрані. Зовнішнє коло описується променем при відсутності КВ в АБП, а внутрішня точка або коло - при наявності КВ в АБП. При зрівноважуванні малих дисбалансів залишковий дисбаланс практично відсутній, тому лазерний промінь вказує у своє статичне положення (рис. 7.11, а). При зрівноважуванні найбільших дисбалансів, що може зрівноважити АБП, величина залишкового дисбалансу найбільша. Тому промінь лазера описує на горизонтальному екрані коло, але його діаметр у 6-7 разів менший, ніж діаметр цього кола при відсутності КВ в АБП (рис. 7.11, в, г). Пояснюється це зростанням тиску КВ на вісь АБП при зростанні дисбалансу. При цьому зростає тертя між КВ і віссю, що знижує точність балансування. Точність балансування нового АБП більша точності кульового, особливо при зрівноважуванні малих дисбалансів.

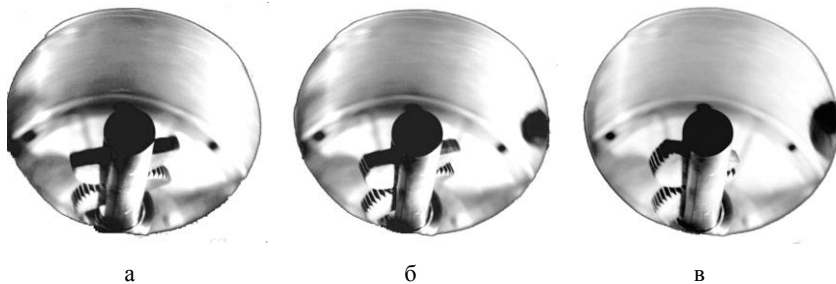


Рис. 7.10. Зрівноважування новим АБП різних дисбалансів:  
а - дисбалансу немає; б - середній дисбаланс; в - великий дисбаланс.

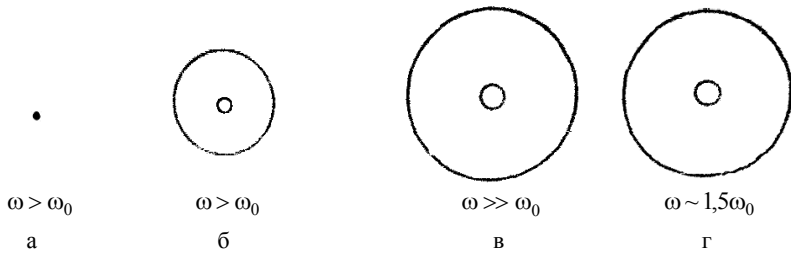


Рис. 7.11. Фотографії слідів лазерного променя на екрані при наявності і відсутності КВ в новому АБП:

- а - дисбалансу немає; б - малий дисбаланс;
- в - великий дисбаланс і велика швидкість обертання ротора;
- г - великий дисбаланс і мала резонансна швидкість обертання ротора.

Для оцінки максимально можливого залишкового дисбалансу були проведені більш точні експерименти за такою методикою. У середину ротора послідовно поміщалися дисбаланси, величиною  $iS/10$ ,  $i=3, 4, \dots, 20$ . Для кожного дисбалансу ротор декілька разів запускався і за найбільш яскравою областю кола, яке описував лазерний промінь, встановлювався діаметр кола. Серед діаметрів, одержаних для одного дисбалансу, обирався найбільший. За величинами отриманих найбільших діаметрів було встановлено:

1) у випадку дисбалансів, які АБП може зрівноважити, початковий дисбаланс зменшується у  $6 \div 7$  разів і величина максимально можливого залишкового дисбалансу майже лінійно залежить від величини дисбалансу, який зрівноважується:

$$S_{\text{зал}}^{\text{max}} = S / (6 \div 7),$$

причому тут і надалі  $6$  відповідає в'язкому мастилу, а  $7$  – рідкому;

2) у випадку дисбалансів, які АБП не може зрівноважити, величина максимально можливого залишкового дисбалансу визначається за формулою:

$$S_{\text{зал}}^{\text{max}} = S - 1 + S / (6 \div 7).$$

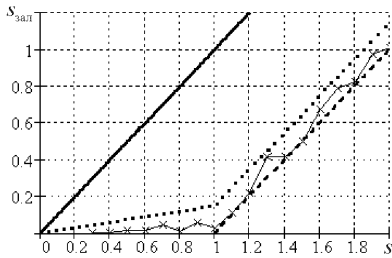
За одержаними результатами встановлені формули для залишкового дисбалансу, що відповідають ідеальній роботі АБП

$$S_{\text{зал}}^{\text{min}} = \begin{cases} 0, & S \leq 1; \\ S - 1, & S > 1, \end{cases} \quad (7.30)$$

і найгіршій роботі АБП

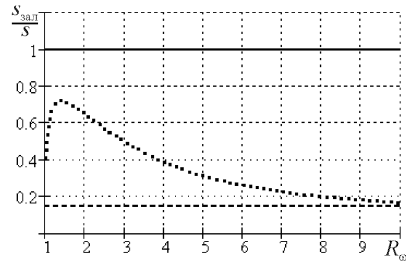
$$S_{\text{зал}}^{\text{max}} = \begin{cases} S / (6 \div 7), & S \leq 1; \\ S - 1 + S / (6 \div 7), & S > 1. \end{cases} \quad (7.31)$$

Відповідні теоретичні і типовий експериментальний графіки побудовані на рис. 7.12.



- АБП не працює;
- ×-× АБП працює – експериментальні дані;
- обмеження дисбалансу зверху;
- обмеження дисбалансу знизу.

Рис. 7.12. Залишковий дисбаланс нового АБП



- АБП - не працюють;
- АБП - прототип;
- новий АБП.

Рис. 7.13. Обмеження залишкового дисбалансу зверху в залежності від кутової швидкості обертання ротора

За умови, що новий АБП зменшує початковий дисбаланс у  $6 \div 7$  разів, побудовані теоретичні графіки, які обмежують зверху максимальний залишковий дисбаланс нового АБП і АБП – прототипу (рис. 7.13).

Якість зрівноваження ротора новим АБП була порівняна - з АБП-прототипом.

1. На великих зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $\omega > 8\omega_0$ ) якість зрівноваження ротора двома пристроями практично не відрізняється.

2. При зменшенні кутової швидкості обертання ротора КВ в АБП - прототипі під дією сил ваги відхиляються від положення, в якому зрівноважують ротор, а в новому АБП залишаються у вихідному положенні.

3. При обертанні ротора з навколо зарезонансними швидкостями залишковий дисбаланс у прототипі складає майже половину від початкового і найбільший на швидкостях  $\omega \sim 1,5\omega_0$ .

4. Експерименти з АБП-прототипом підтверджують, що нові АБП більш ефективні при зрівноваженні ротора, особливо в діапазоні кутових швидкостей, що у  $1 \div 8$  разів перевищують резонансну швидкість обертання ротора.

**Дослідження усталених рухів системи при обертанні ротора із сталими кутовими швидкостями.** Шляхом спостереження за КВ у стробоскопічному освітленні встановлено, що при обертанні ротора із сталою кутовою швидкістю встановлюється певний рух системи, який характеризується певним положенням чи рухом КВ відносно ротора.

1. На дорезонансних швидкостях обертання ротора ( $\omega=0\div 0,9\omega_0$ ) КВ максимально відхиляються у важкий чи легкий бік, тобто максимально збільшують дисбаланс ротора, чи створюють його з протилежного боку (рис. 7.14, а, б). Лазерний промінь описує на горизонтальному екрані коло, радіус якого збільшується із зростанням кутової швидкості обертання ротора.

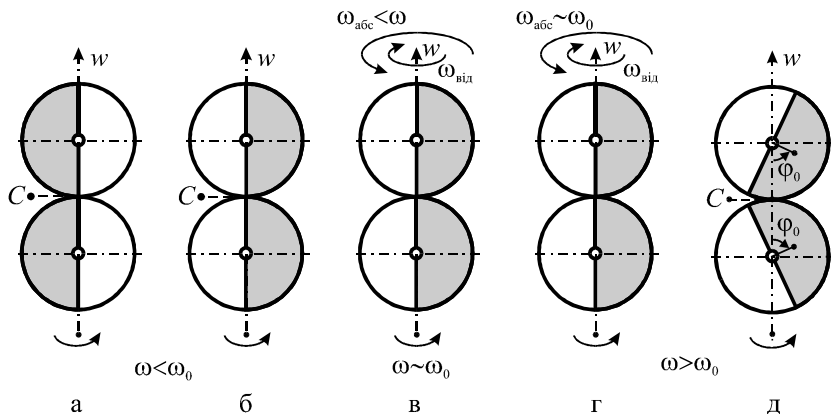


Рис. 7.14. Положення і рухи КВ відносно ротора в усталених режимах руху системи - залежність від кутової швидкості обертання ротора  $\omega$

2. В околі резонансної кутової швидкості обертання ротора ( $\omega=0,9\div 1,1\omega_0$ ) рух КВ залежить від величини в'язкого тертя у підшипниках.

2.1. При рідкому мастилi (чи при розведенні мастила керосином) спостерігається, що КВ здійснює усталені нестационарні рухи відносно ротора. В околі резонансної швидкості обертання ротора КВ починають відставати від ротора і обертаються з абсолютною кутовою швидкістю, що дорівнює резонансній частоті (рис. 7.14, в). Із збільшенням кутової швидкості обертання ротора (рис. 7.14, г) видиме зображення КВ починає подвоюватися, потроюватися і т.д. - в міру відставання КВ від ротора. Останній здійснює коливання із значною амплітудою.

Лазерний промінь описує гіпоциклоїди, утворені прямими прецесією і нутацією ротора. Кількість пелюсток у гіпоциклоїді тим більша, чим більша частота обертання ротора. Гіпоциклоїда обертається на екрані в одному чи протилежному напрямках із різними швидкостями. Коли швидкість обертання ротора у ціле число разів  $k$  перевищує резонансну частоту, то гіпоциклоїда стає нерухомою і має  $(k-1)$  пелюсток.

Описаний режим стійкий до збурень різного походження і заважає автобалансуванню ротора.

2.2. При в'язкому мастилi спостерiгається, що КВ займає фіксоване положення відносно ротора. При кутовій швидкості  $\omega \approx 0,9\omega_0$  центр мас КВ найбільше відхилений у важкий бік ротора. Із зростанням кутової швидкості обертання ротора в межах  $\omega = 0,9 \div 1\omega_0$  центр мас КВ відхиляється у напрямку, який відстає від напрямку дисбалансу ротора. При наближенні кутової швидкості обертання ротора до резонансної ( $\omega \approx \omega_0$ ) кут між вектором дисбалансу ротора і вектором дисбалансу КВ близький до  $90^\circ$ . При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора у межах  $\omega = 1 \div 1,1\omega_0$  кут між векторами дисбалансу ротора і КВ зростає від  $90^\circ$  до  $180^\circ$  і настає явище автобалансування (рис. 7.14, д).

**Дослідження режимів пуску і вибігу ротора.** При дисбалансі, який може зрівноважити АБП і при в'язкому мастилi в підшипниках, розгін ротора завжди закінчується автобалансуванням. Час перехідних процесів від 2 до 4 секунд. При цьому спостерігаються два різних режими розгону.

1. У першому режимі розгону КВ максимально відхилені і при обертанні відстають від ротора (рис. 7.15, а). Під час розгону їхнє видиме зображення подвоюється, потроюється, зчетвериться і т.д. - у міру відставання від ротора, а потім у зворотному порядку - у міру того, як КВ доганяють ротор. Коли КВ доганяють ротор, то відбувається їхнє переміщення в нейтральне положення, а потім вони знаходять площину дисбалансу і відхиляються в цій площині на кут, необхідний для усунення дисбалансу (рис. 4.15, в).

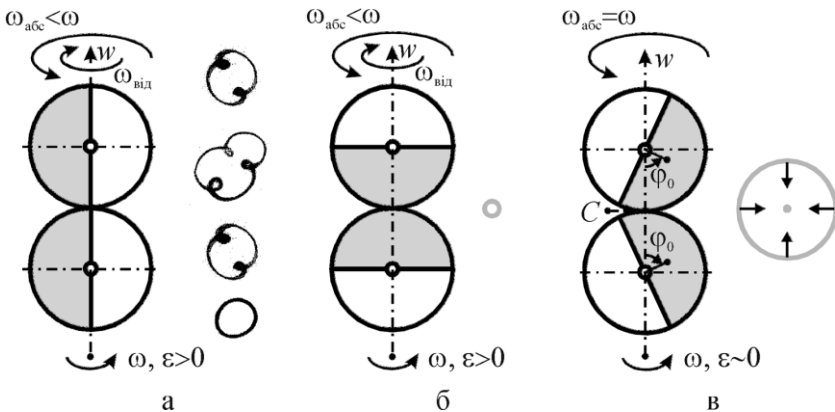


Рис. 7.15. Перехідні процеси при розгоні ротора



Спостерігаються коливання КВ із швидкостями, близькими до резонансної частоти, біля положень, у яких вони зрівноважують ротор. Ці коливання через 1-3 секунди згасають. Промінь лазера, поки КВ найбільше відхилені, описує фігури, схожі на гіпоциклоїди. При цьому кількість пелюсток гіпоциклоїди спочатку зростає, а потім зменшується. При коливанні КВ навколо положень, у яких вони зрівноважують ротор, промінь лазера описує коло, що змінює свій діаметр. У результаті декількох коливань з навколо резонансною частотою коло вироджується в точку.

2. В другому режимі розгону КВ знаходяться в нейтральному положенні - не відхилені (рис. 7.15, б). Їхнє видиме зображення подвоюється, потроюється і т.д., а потім у зворотному порядку. Коли КВ доганяють ротор, то вони знаходять площину дисбалансу і відхиляються в цій площині на кут, необхідний для усунення дисбалансу (рис. 7.15, в). Спостерігаються коливання КВ із швидкостями, близькими до резонансної частоти, біля положень, у яких вони зрівноважують ротор. Ці коливання через 1-3 секунди згасають. Іноді лазерний промінь під час розгону КВ вказує в точку свого статичного положення, і тільки під час коливань КВ навколо положень, у яких вони зрівноважують ротор, з'являється пульсуюче коло, але його діаметр значно менший, ніж у попередньому описаному режимі розгону. Другий режим розгону КВ значно спокійніший за перший. Режим автобалансування стійкий до зовнішніх збурень. На великих швидкостях обертання ротора на положення КВ мало впливають зовнішні силові дії на ротор або гальмування ротора.

При очищенні підшипників від мастила поведінка АБП принципово змінюється. Явище автобалансування настає чи не настає в залежності від початкового відхилення КВ від нейтрального положення.

1. Якщо початкове відхилення менше  $45^0$ , то КВ під час пуску ротора приходять у нейтральне положення і залишаються в ньому, поки не доганять ротор (рис. 7.15, б). Потім вони знаходять площину дисбалансу і відхиляються в ній на кут, потрібний для зрівноваження дисбалансу (рис. 7.15, в). Цей режим подібний другому режиму розгону ротора при в'язкому мастилі. Але відрізняється тривалістю, яка може складати 3-12 с.

2. Якщо початкове відхилення більше  $45^0$ , то КВ під час пуску ротора максимально відхиляються. Їх абсолютна кутова швидкість обертання зростає до резонансної швидкості обертання ротора. Оскільки швидкість обертання ротора продовжує збільшуватися, то у стробоскопічному освітленні видно, що зображення КВ подвоюється, потроюється, зчетвериться і т.д. - у міру їх відставання від ротора. Лазерний промінь описує на горизонтальному екрані гіпоциклоїди, у яких кількість пелюсток збільшується із зростанням кутової швидкості обертання ротора. Коли швидкість обертання ротора стає сталою, то спостерігається стійкий побічний усталений нестационарний режим руху ротора і АБП: КВ оберта-

ються відносно землі з резонансною швидкістю обертання ротора, ротор обертається із сталою кутовою швидкістю і його вісь здійснює складний рух, який є сумою прямої прецесії і прямої нутації. Цей рух стійкий до збурень різного походження і докладніше досліджується нижче.

При дисбалансі, який не може зрівноважити АБП, поза залежності від в'язкості мастила в підшипниках, розгін ротора завжди закінчується автобалансуванням. Час перехідних процесів від 3 до 12 секунд, причому тим менший, чим більша в'язкість мастила.

**Дослідження побічного усталеного нестационарного режиму руху ротора і АБП.** В побічному усталеному нестационарному режимі руху ротора і АБП КВ найбільше відхилені і при обертанні відстають від ротора. Їх абсолютна кутова швидкість обертання навколо повздовжньої осі ротора дорівнює резонансній швидкості обертання ротора. Тому ротор робить "повільні" прецесійні коливання з цією частотою. Лазерний промінь описує гіпоциклоїди, що є сумою прямої прецесії і прямої нутації (рис. 7.16). Частота "швидких" нутаційних коливань дорівнює швидкості обертання ротора.

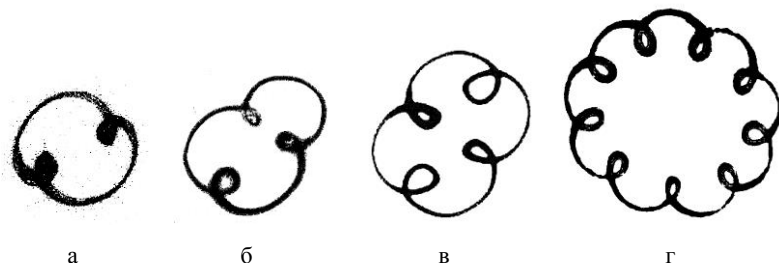


Рис. 7.16. Фотографії слідів лазерного променя - гіпоциклоїди, залежність від швидкості обертання ротора:

а -  $\omega = 3\omega_0$ , 2 пелюстки; б -  $\omega = 4\omega_0$ , 3 пелюстки;

в -  $\omega = 5\omega_0$ , 4 пелюстки; г -  $\omega = 10\omega_0$ , 9 пелюсток.

За результатами вимірювань частота прецесійних коливань складала:

$$\omega_{\text{п}} = 3,30 \pm 0,03, \quad (7.32)$$

тобто фактично дорівнює резонансній частоті.

Аналітично закон руху вала ротора відносно нерухомих осей  $x$ ,  $y$ , визначається за формулами

$$x = A_{\text{п}} \cos \omega_0 t + A_{\text{н}} \cos \omega t, \quad y = A_{\text{п}} \sin \omega_0 t + A_{\text{н}} \sin \omega t, \quad (7.33)$$

де  $A_{\text{п}}$  – амплітуда прецесійних,  $A_{\text{н}}$  – нутаційних коливань.

При малих дисбалансах лазерний промінь описує укорочені гіпоциклоїди і навіть кола (рис. 7.17, а). При зростанні дисбалансу гіпоциклоїди стають нормальними (рис. 7.17, б), а потім подовженими (рис. 7.17, в, г).

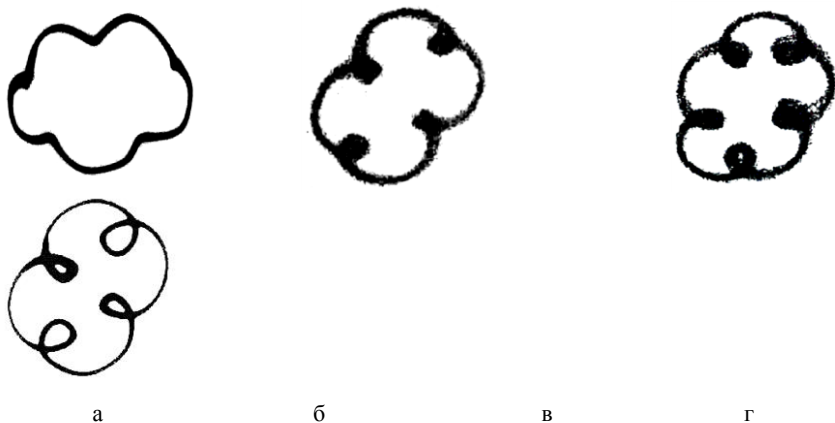


Рис. 7.17. Фотографії слідів лазерного променя - укорочені, нормальні і подовжені гіпоциклоїди, залежність від дисбалансу:  
 а - укорочена гіпоциклоїда - дисбаланс малий;  
 б - нормальна гіпоциклоїда - дисбаланс середній;  
 в, г - подовжені гіпоциклоїди - дисбаланс великий.

При дисбалансах, більших граничної величини, що може зрівноважити АБП, описаний режим руху ротора не спостерігається. Відбувається неспокійний розгін ротора, а потім КВ максимально відхиляються в легкий бік ротора, чим зменшують дисбаланс і частково зрівноважують ротор.

Коли частота нутаційних коливань у ціле число -  $k$  раз більше резонансної частоти, то гіпоциклоїда на екрані нерухома і має  $(k-1)$  пелюсток (рис. 7.18), тобто одна пелюстка пропадає (при прямій прецесії і зворотній нутації - навпаки, одна пелюстка додається). При некрратному співвідношенні частот гіпоциклоїда обертається в одному чи протилежному напрямку, причому напрямок обертання сприймається суб'єктивно – повільне обертання в одному напрямку одночасно може сприйматися як швидке обертання у протилежному напрямку.

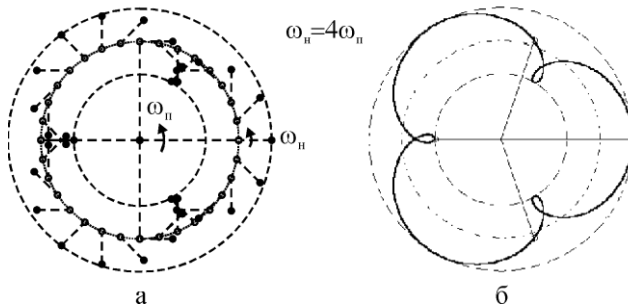


Рис. 7.18. Утворення гіпоциклоїд прямими прецесією і нутацією

Описаний режим стійкий до зовнішніх силових дій на ротор і до зміни швидкості обертання ротора.

При вибігу ротора кратність зображень КВ зменшується, аж до подвоєння. При подальшому зменшенні швидкості обертання ротора видно дійсний рух КВ відносно ротора - вони найбільше відхилені, і обертаючись, відстають від ротора. При падінні швидкості обертання ротора до резонансної частоти, спостерігається картина, аналогічна першому режиму.

Режим руху, що розглядається, так само не спостерігається, якщо в момент пуску КВ займають нейтральне положення або незначно відхилені від нього. У зв'язку з цим:

1) Нижній КВ був зроблений легшим за верхній. При цьому, під дією сил ваги, КВ почали приходити в нейтральне положення. Це забезпечило спокійний розгін ротора й усунуло нестационарний побічний режим руху.

2) Запропоновано при наявності корпусу АБП частково заповнювати його порожнину рідиною. При нерухомому роторі вона забезпечить прихід КВ у нейтральне положення, оскільки на нижній КВ діятиме архімедова сила. При обертанні ротора з робочою кутовою швидкістю рідина розподілиться по стінці корпусу і КВ будуть повністю нечутливі до сил ваги.

**Дослідження впливу збурень різного походження на процес балансування ротора АБП.** На зарезонансних швидкостях обертання ротора досліджувався вплив на процес балансування збурень різного походження. Дослідження, проведені для двох моделей АБП, показали наступне.

Створювалася раптова зміна дисбалансу, шляхом закидання усередину ротора дискретних мас, утворюючих дисбаланс. Встановлено, що це приводить як до коливань ротора, так і до зміни відносного положення КВ. Перехідні процеси, пов'язані із зміною відносного

положення КВ, проходять тим швидше, чим більша кутова швидкість обертання ротора. Коливання ротора відбуваються з частотою власних коливань ротора (з резонансною частотою) і їх тривалість фактично не залежить від кутової швидкості обертання ротора. Тому КВ швидше приходять у положення, в якому зрівноважують ротор, ніж заспокоюються коливання ротора.

Здійснювався удар по корпусу машини. Для цього важке тіло було підвешене на мотузку. Сила удару регулювалася кутом відхилення тіла від вертикалі. Встановлено, що удар призводить до тих же наслідків, що і раптова зміна дисбалансу – КВ відхиляються від положення, у якому зрівноважують ротор, останній – здійснює коливання з резонансною частотою, і тривалість перехідних процесів така ж, як і при раптовій зміні дисбалансу.

Повільна зміна дисбалансу створювалася засипанням усередину ротора сипучого матеріалу за принципом пісочного годинника. Встановлено, що це приводить до повільної зміни відносного положення КВ. Лазерний промінь практично вказує в точку і остання дещо відхиляється від статичного положення. Перехідні процеси, пов'язані з відносним рухом КВ і коливаннями ротора, майже непомітні.

Якщо швидкість обертання ротора в декілька разів перевищує резонансну частоту й автобалансування відбулося, то наступна зміна орієнтації ротора (шляхом нахилу корпусу машини до  $45^0$ ) не впливає на положення КВ відносно ротора, лазерний промінь продовжує описувати коло того ж радіуса, що і при відсутності нахилу, і КВ реагують на зміну дисбалансу. З цього зроблений висновок, що при розігнаному роторі, за умови, що його кутова швидкість в декілька разів перевищує резонансну, зміна орієнтації ротора не впливає на подальший процес балансування.

Бічним тиском на ротор імітувався процес шліфування чи фрезерування. Тиск утворювався зігнутою пружною пластиною. Виявлено, що наявність тиску не призводить до зміни положення КВ відносно ротора. Лазерний промінь описує еліпс з більшою піввіссю, паралельною пластині. Довжина більшої півосі приблизно дорівнює радіусу кола, яке описує лазерний промінь без бічного тиску. КВ реагують на поточну зміну дисбалансу. При зменшенні кутової швидкості обертання ротора автобалансування зникає на більших кутових швидкостях, ніж при відсутності тиску. З цього зроблений висновок, що бічний тиск сприймається ротором як збільшення жорсткості опор у відповідному напрямку, тому АБП продовжує функціонувати, але на більших кутових швидкостях обертання ротора.

#### **7.1.4. Основні результати аналітичної теорії квазіперіодичних рухів**

Викладаються основні результати аналітичної теорії квазіперіодичних рухів АБП, не чутливих до сил ваги, розробленої автором у п. 6.5 розділу 6.

Диференціальні рівняння руху системи ротор-АБП у комплексному вигляді, складені відносно нерухомої системи координат, мають вигляд:

$$\begin{aligned} c_1 &= \ddot{\varphi} + h_1 \dot{\varphi} - \frac{i}{2} (\ddot{z}e^{-i\alpha} - \ddot{\bar{z}}e^{i\alpha}) \cos \varphi = 0, \\ c_2 &= [\ddot{\alpha} + h_2(\dot{\alpha} - R_\omega)] R_p^2 - \frac{1}{2} (\ddot{z}e^{-i\alpha} + \ddot{\bar{z}}e^{i\alpha}) \sin \varphi = 0, \\ c_3 &= \ddot{z} + H\dot{z} + z - \\ &\quad - R_m \langle \{ (2\dot{\alpha}\dot{\varphi} - i\ddot{\varphi}) \cos \varphi + [\ddot{\alpha} + i(\dot{\varphi}^2 + \dot{\alpha}^2)] \sin \varphi \} e^{i\alpha} + R_\omega^2 e_0 e^{iR_\omega \tau} \rangle = 0, \\ c_4 &\approx \bar{c}_3 \end{aligned} \quad (7.34)$$

Вони одержані з системи (7.2) після переходу до нерухомої (безрозмірної) системи координат:

$$\psi = -R_\omega \tau + \alpha, \quad \xi = x \cos R_\omega \tau + y \sin R_\omega \tau, \quad \eta = -x \sin R_\omega \tau + y \cos R_\omega \tau, \quad (7.35)$$

де:  $x, y$  – безрозмірні координати повздожньої осі ротора, знайдені відносно нерухомих осей  $X, Y$ ;  $\alpha$  – кут, що відрховується від осі  $X$  і визначає поворот КВ навколо повздожньої осі ротора, і після введення комплексних змінних

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad (7.36)$$

За умови, що дисбаланс є малою величиною

$$e_0 \ll 1 \quad (7.37)$$

система (7.36) допускає декілька однопараметричних сімей усталених квазіперіодичних розв'язків, які наближено визначаються таким чином

$$\varphi \approx \text{const}, \quad \alpha \approx \Omega \tau + \gamma, \quad \Omega = \text{const}, \quad \Omega \neq R_\omega,$$

$$z \approx \frac{iR_m \sin \varphi e^{i(\Omega \tau + \gamma)}}{1 + iH\Omega - \Omega^2} + \frac{R_m e_0 e^{iR_\omega \tau}}{1 + iHR_\omega - R_\omega^2}, \quad (7.38)$$

де  $\gamma$  – параметр (довільний кут), а  $\Omega$  і  $\varphi$  визначаються з наступної системи алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\Omega^4 (1 - \Omega^2) R_m}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} \cos \varphi \sin \varphi = 0, \quad h_2 (\Omega - R_\omega) R_p^2 + \frac{\Omega^5 H R_m \sin^2 \varphi}{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2} = 0. \quad (7.39)$$

Серед всіх можливих квазіперіодичних рухів асимптотично стійкі тільки рухи однієї сім'ї, у якій

$$\varphi = \pi/2, \quad 0 < \Omega < 1. \quad (7.40)$$

Вона існує в такому діапазоні кутових швидкостей обертання ротора

$$1 < R_{\omega} < R_{\omega_1}^*, \quad R_{\omega_1}^* = 1 + \frac{R_m}{h_2 H R_{\rho}}. \quad (7.41)$$

Якщо сили зовнішнього опору малі ( $H \ll 1$ ), то

$$\Omega \approx 1 - \sqrt{\frac{R_m H}{h(R_{\omega} - 1)}}. \quad (7.42)$$

Квазіперіодичні рухи повздожньої осі ротора цієї сім'ї задаються рівнянням

$$z \approx \frac{iR_m e^{i(\Omega\tau + \gamma)}}{1 + iH\Omega - \Omega^2} + \frac{R_m e_0 e^{iR_{\omega}\tau}}{1 + iHR_{\omega} - R_{\omega}^2}, \quad (7.43)$$

і вони утворені сумою двох рухів:

1) прямої прецесії з частотою і амплітудою

$$\Omega, \quad A_{\Pi} = R_m / \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2}; \quad (7.44)$$

2) прямої нутації з частотою і амплітудою

$$R_{\omega}, \quad A_{\text{H}} = e_0 R_m / \sqrt{(R_{\omega}^2 - 1)^2 + H^2 R_{\omega}^2}. \quad (7.45)$$

Частота прецесії близька до резонансної швидкості, але дещо менша. Частота нутації збігається з частотою обертання ротора і амплітуда нутаційних коливань пропорційна величині дисбалансу.

Враховуючи довільність кута  $\gamma$  і довільність у виборі початкового моменту часу, закон руху повздожньої осі ротора можна подати у такому вигляді

$$z \approx R_m \left[ \frac{e^{i(\Omega\tau + \gamma)}}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + H^2 \Omega^2}} + \frac{e_0 e^{iR_{\omega}\tau}}{\sqrt{(R_{\omega}^2 - 1)^2 + H^2 R_{\omega}^2}} \right]. \quad (7.46)$$

Це рівняння є аналогом рівняння (7.33), знайденого експериментальним шляхом. Тільки рівняння (7.33) справедливо у випадку, коли малі сили зовнішнього опору, чи ротор швидко обертається, тобто у випадках, при яких  $\Omega \sim 1$ . З рівняння (7.46) випливає, що:

- 1) повздожня вісь ротора рухається по гіпоциклоїді;
- 2) коли частота нутації  $R_{\omega}$  у ціле число -  $k$  разів більша за частоту прецесії  $\Omega$ , то рух періодичний, гіпоциклоїда замкнена і має  $(k-1)$  пелюсток (рис. 7.16, 7.18, 7.19, а), тобто одна пелюстка зникає;
- 3) коли частота нутації у раціональне число разів більше за частоту прецесії, то рух періодичний і гіпоциклоїда замкнена (рис. 7.19, б);
- 4) коли частота нутації у ірраціональне число разів більше за частоту прецесії, то рух квазіперіодичний і гіпоциклоїда не замкнена (рис. 7.19, в).

- 5) При невеликих дисбалансах гіпоциклоїда скорочена (рис. 7.17, а, 7.20, а), при середніх – нормальна (рис. 7.17, б, 7.20, б), при великих – подовжена (рис. 7.17, в, 7.20, в, г).

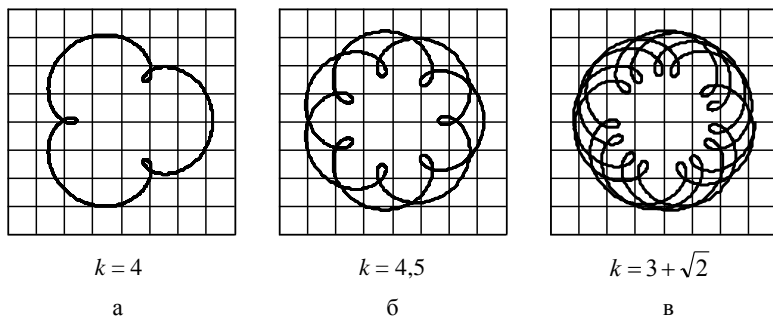


Рис. 7.19. Гіпоциклоїди – залежність від відношення частоти нутації до частоти прецесії  $k = R_{\omega} / \Omega$

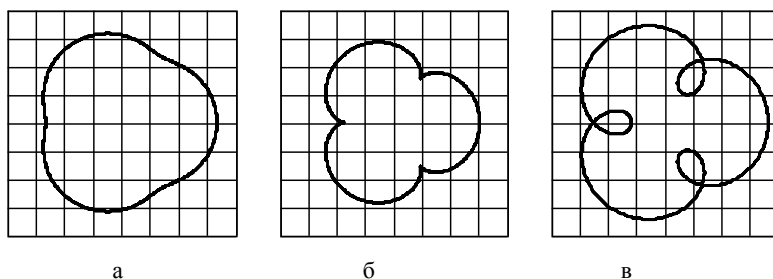


Рис. 7.20. Гіпоциклоїди – залежність від величини дисбалансу ( $k = 4$ ):  
 а – дисбаланс малий, б – середній, в – великий

Ці висновки повністю збігаються з результатами експериментальних досліджень.

## 7.2. Динаміка АБД

Викладаються основні результати робіт [128-138,158,159], присвячених розробці нового методу віброзахисту роторів за допомогою АБД, дослідженню принципів конструювання відповідних пристроїв, теоретичному і експериментальному дослідженню їх динаміки. Дослідження виконані В.С.Сотніковим за участю і під науковим керівництвом автора. Результати досліджень доповнені наближеною формулою для ефективності зрівноваження АБД статичних дисбалансів,



одержану автором у п.6.4 розділу 4 для АБП, у якого КВ повертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора.

### 7.2.1. Принципи конструювання АБД

Задача віброзахисту не до кінця розв'язана для багатьох роторних систем, зокрема роторів екстракторів, сепараторів, центрифуг, шпинделів шліфувальних верстатів, швидкісних торцевих фрез, барабанів сільсько-господарських машин та інших, чий дисбаланс змінюється під час експлуатації і на які одночасно діють збурюючі сили, викликані виконанням ротором покладених на нього технологічних функцій. Так, відомі пасивні АБП – кульові, маятникові і кільцеві, зрівноважують ротор на ходу, але не демпфують поперечні кутові вібрації ротора, їх КВ діють на вал чи ротор із значними силами, вносять додатковий дисбаланс в систему під час розгону чи гальмування ротора, мають незначну балансувальну ємність та інше. Динамічний демпфер, у вигляді сфери усередині ротора (рис. 7.21), ефективно гасить кутові вібрації ротора, але не зрівноважує його при цьому. Тому є актуальною задача розробки нового методу віброзахисту роторів, який полягає у одночасному зрівноважуванні ротора на ходу і демпфуванні його кутових вібрацій, теоретичне обґрунтування цього методу, створення на його основі автобалансирів-демпферів (АБД), теоретичне і експериментальне дослідження їх динаміки.

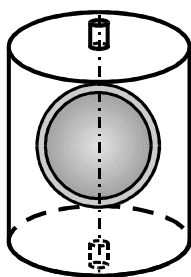


Рис. 7.21. Сферичний динамічний демпфер

Основною ідеєю у створенні АБД є встановлення неklasичних КВ з можливістю здійснювати сферичний рух навколо нерухомої точки на повздовжній осі ротора. Надання КВ сферичного руху навколо нерухомої точки дає можливість КВ здійснювати відносно ротора будь-які обертальні рухи під час довільних повздовжніх і поперечних кутових коливань ротора. При наявності сил внутрішнього тертя між КВ і ротором, енергія коливань буде розсіюватися. Це надасть пристроям, що створюються, властивості сферичного динамічного демпфера.

Виділені ознаки, комбінаціями яких створюються АБД.

За першу ознаку, яку позначимо А№, прийемо тип КВ з рис. 2.8. При цьому, № позначає номер КВ на згаданому рисунку. За другу ознаку - В№, прийемо спосіб утворення КВ: В1 - масивне тіло; В2 - поплавок у мастилі; В3 - отвори у суцільному тілі ("від'ємна" маса). За третю ознаку - С№, прийемо спосіб надання КВ сферичного руху навколо нерухомої точки (рис. 7.21): С1 - кардановий підвіс; С2 - КВ у сфері, яка розміщена у сферичній порожнині; С3 - сферичний шарнір.

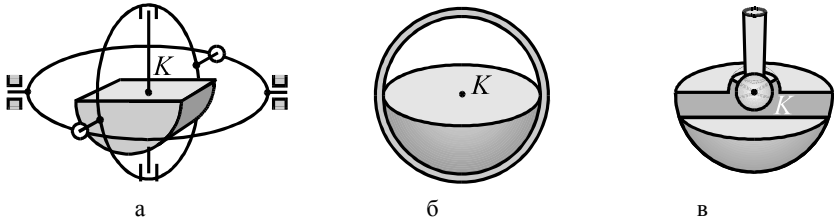


рис. 7.22. Основні способи надання КВ руху навколо нерухомої точки:  
 а - кардановий підвіс;  
 б - КВ у сфері, яка знаходиться у сферичній порожнині;  
 в - сферичний шарнір

За четверту ознаку - D№, прийнемо розміщення чи спосіб виконання АБД: D1 - усередині порожнистого вала чи ротора; D2 - балансувальна голівка, що насаджується на торець вала.

Ознаки, комбінаціями яких створюються АБД, зведені у табл. 7.2. При її використанні слід мати на увазі, що комбінація певних ознак неможлива.

Табл. 7.2.

Ознаки, комбінаціями яких створюються АБД

№	Вид КВ АН№	Спосіб утворення КВ, В№	Спосіб надання сферичного руху, С№	Розміщення (виконання) АБД, D№
1	№ КВ	Масивне тіло	Карданів підвіс	Усередині порожнистого ротора чи вала
2		Поплавок у мастилі	Встановлення у порожнисту сферу	Балансувальна голівка, що насаджується на торець вала
3		Отвори у суцільному тілі	Кульовий шарнір	-

На рис. 7.23 наведені деякі приклади синтезу АБД. Наприклад, на рис. 7.23, б зображений АБД, створений комбінацією ознак A11+B2+C3+D2. A11 означає, що КВ - це півсфера, B2 - КВ виконаний з легкого матеріалу і поміщений у мастило (поплавок у мастилі), C3 - сферичний рух КВ надається сферичним шарніром, D2 - АБД виконаний у вигляді окремої балансувальної голівки, що нагвинчується на торець вала.

При синтезі АБД треба взяти до уваги наступне.

По-перше, у сферичному динамічному демпфері демпфіруюче тіло - куля, має сферичний тензор інерції. Це дозволяє однаково добре демпфірувати кутові коливання ротора, незалежно від того, наскільки повернулася куля усередині сферичної порожнини. Щоб АБД мали таку властивість, треба брати для їх створення КВ з сферичним тензором інерції відносно точки підвісу.

По-друге, симетричні тіла мають меншу кількість положень рівноваги відносно ротора, а значить і меншу кількість побічних усталених рухів, що полегшує процес автобалансування.

По-третє, симетричні тіла будуть реагувати на зміну напрямку невеликого дисбалансу невеликими відхиленнями від осі обертання, в той час, як несиметричні тіла вимушені будуть повертатися на ті кути, на які повернеться вектор дисбалансу.

Зазначене робить доцільним використовувати для створення АБД КВ із сферичним тензором інерції відносно точки підвісу.

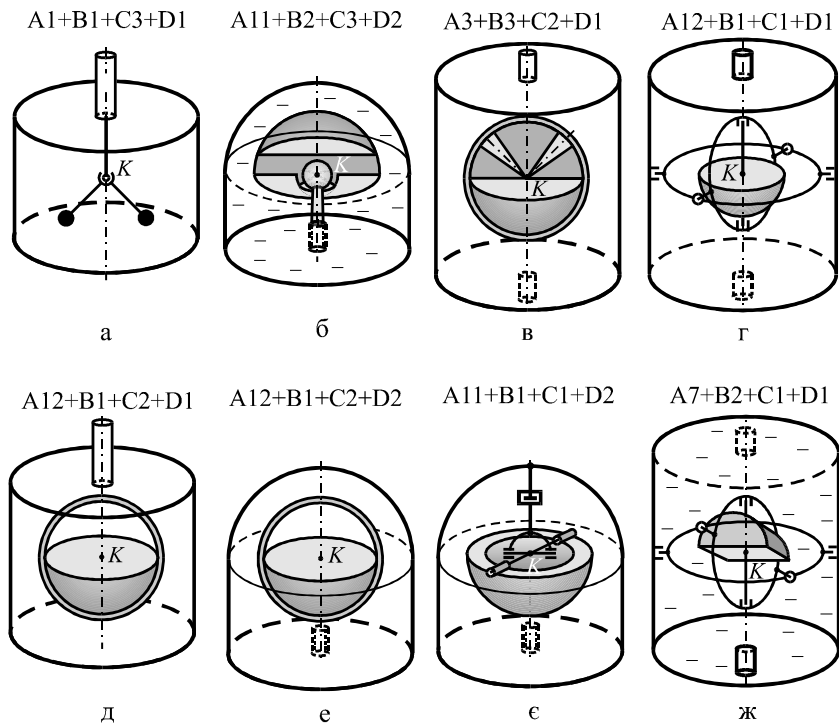
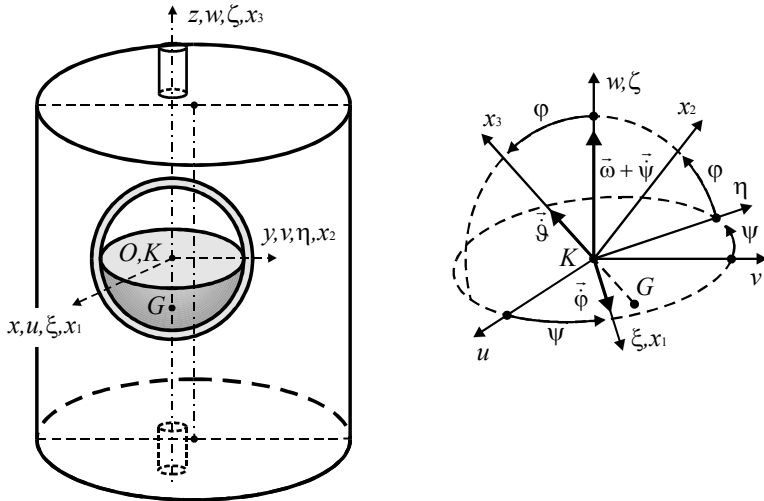


Рис. 7.23. Деякі приклади синтезу АБД



АБД можна використовувати і у випадку будь-як розташованих роторів. Так, на великих швидкостях обертання ротора вплив сил ваги на рух системи майже непомітний. Тому автобалансування і демпфірування залишаються, але під час пуску ротора КВ будуть вносити додатковий дисбаланс в систему.

### 7.2.2. Основні результати теоретичних досліджень

Побудована математична модель ротора і АБД. На рис. 7.6, а зображена схема ротора і дисбалансу, а на рис. 7.24 - схема АБД. Припускалося, що ротор розташований вертикально і рухається плоскопаралельно. Його утримують ізотропні в'язкопружні опори. Для описання руху ротора використані осі  $Oxuz$ , що обертаються разом з ротором із сталою кутовою швидкістю  $\omega$ , причому вісь  $z$  збігається з віссю обертання, і точка  $O$  знаходиться на рівні точки підвісу КВ.

Рис. 7.24. Схема АБД

Допоміжні осі  $Kuvw$  жорстко зв'язані з ротором і паралельні осям  $Oxuz$ , причому вісь  $w$  збігається з віссю ротора, і при відсутності відхилення вала від осі обертання точки  $K$  і  $O$  співпадають. Відносно осей  $Kuvw$  центр мас ротора має координати  $(e \cos \gamma, e \sin \gamma, 0)^T$ , де  $e$  - ексцентриситет,  $\gamma$  - кут, що визначає напрямок вектора дисбалансу. При поворотах КВ навколо точки підвісу виникає момент в'язкого опору  $-H_1 \bar{\Omega}$ , де  $H_1$  - коефіцієнт в'язкого опору,  $\bar{\Omega}$  - кутова швидкість обертання КВ відносно ротора. У процесі руху вал відхиляється від осі обертання на  $\mathbf{r}=\mathbf{OK}$  і на

нього починають діяти поновлююча сила  $-c\mathbf{r}$  і сила в'язкого опору  $-H_2\mathbf{v}$ , де  $c$  - жорсткість,  $H_2$  - коефіцієнт в'язкого опору опору,  $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$  - абсолютна швидкість осі вала ротора (точки  $K$ ). Положення КВ відносно ротора визначалося трьома кутами Ейлера (рис. 7.24, б). У рамках побудованої моделі система має п'ять степенів вільності, її динаміку описує система п'яти звичайних нелінійних автономних диференціальних рівнянь другого порядку, яка містить одинадцять розмірних параметрів. У безрозмірному вигляді рівняння динаміки мають вигляд:

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + (\dot{\psi}\dot{\theta} + R_\omega\dot{\theta} + R_g^2)\sin\varphi - \\ & - [(\ddot{\xi} - 2R_\omega\dot{\eta} - R_\omega^2\xi)\sin\psi - (\ddot{\eta} + 2R_\omega\dot{\xi} - R_\omega^2\eta)\cos\psi]\cos\varphi = 0, \\ & (\ddot{\psi} + h\dot{\psi})\sin\varphi + (\dot{\psi} + R_\omega)\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}\dot{\theta} - \\ & - (\ddot{\xi} - 2R_\omega\dot{\eta} - R_\omega^2\xi)\cos\psi - (\ddot{\eta} + 2R_\omega\dot{\xi} - R_\omega^2\eta)\sin\psi = 0, \\ & \ddot{\theta} + h\dot{\theta} + (\ddot{\psi} + h\dot{\psi})\cos\varphi - (R_\omega + \dot{\psi})\dot{\varphi}\sin\varphi = 0, \\ & \ddot{\xi} - 2R_\omega\dot{\eta} - R_\omega^2\xi + H(\dot{\xi} - R_\omega\eta) + \xi - R_m\{[\dot{\varphi}\sin\psi + 2(R_\omega + \dot{\psi})\dot{\varphi}\cos\psi]\cos\varphi + \\ & + [\dot{\psi}\cos\psi - (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_\omega\dot{\psi})\sin\psi]\sin\varphi + R_\omega^2(u_0 - \sin\varphi\sin\psi)\} = 0, \\ & \ddot{\eta} + 2R_\omega\dot{\xi} - R_\omega^2\eta + H(\dot{\eta} + R_\omega\xi) + \eta - R_m\{[\dot{\psi}\sin\psi + (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_\omega\dot{\psi})\cos\psi]\sin\varphi - \\ & - [\dot{\varphi}\cos\psi - 2(R_\omega + \dot{\psi})\dot{\varphi}\sin\psi]\cos\varphi + R_\omega^2(v_0 + \sin\varphi\cos\psi)\}, \end{aligned} \quad (7.47)$$

де:

$$\xi = \frac{xl}{\rho^2}, \quad \eta = \frac{yl}{\rho^2}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}\right), \quad (7.48)$$

- безрозмірні змінні;

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{ml^2}{M_\Sigma \rho^2}, \quad R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad R_g^2 = \frac{gl}{\rho^2 \omega_0^2}, \quad h = \frac{H_1}{m\rho^2 \omega_0}, \\ H &= H_2/M_\Sigma \omega_0, \quad e_0 = Me/ml, \quad \gamma. \end{aligned} \quad (7.49)$$

- сім незалежних безрозмірних параметрів, причому

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_\Sigma}, \quad \rho = \sqrt{A/m}, \quad (7.50)$$

де:  $\omega_0$  - резонансна частота - частота власних коливань ротора при нерухомому відносно ротора КВ, відсутності обертання ротора і неврахуванні сил опору;  $\rho$  - осьовий радіус інерції КВ. В (7.47) точка над змінною означає вже похідну по  $\tau$ , а не по  $t$ . Зауважимо, що параметр  $\gamma$  можна виключити належним вибором початку відліку безрозмірного часу  $\tau$ .

Досліджені усталені рухи системи у випадках дисбалансу, який може зрівноважити АБД ( $e_0 < 1$ ) і якого пристрій зрівноважити не може ( $e_0 \geq 1$ ). Записані рівняння усталених рухів

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) R_{\omega}^2 \cos \tilde{\varphi} + R_g^2 \sin \tilde{\varphi} = 0, \\
& (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) R_{\omega}^2 = 0, \\
& (R_{\omega}^2 - 1) \tilde{\xi} + H R_{\omega} \tilde{\eta} + R_m R_{\omega}^2 (e_0 \cos \gamma - \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi}) = 0, \\
& -H R_{\omega} \tilde{\xi} + (R_{\omega}^2 - 1) \tilde{\eta} + R_m R_{\omega}^2 (e_0 \sin \gamma + \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi}) = 0, \quad (7.51)
\end{aligned}$$

де  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$  - усталені значення змінних, що визначають положення системи. Рівняння розв'язані у параметричному вигляді

$$\tilde{\xi} = -R_m R_{\omega}^2 e_0 \frac{\Delta_{\xi}(u)}{\Delta(u)}, \quad \tilde{\eta} = R_m R_{\omega}^2 e_0 \frac{\Delta_{\eta}(u)}{\Delta(u)}, \quad \cos \tilde{\varphi} = u, \quad \operatorname{tg} \tilde{\psi} = \frac{\Delta_{\xi}(u)}{\Delta_{\eta}(u)}, \quad (7.52)$$

де:

$$\begin{aligned}
\Delta(u) &= \left( R_{\omega}^2 - 1 + \frac{R_m R_{\omega}^4}{R_g^2} u \right)^2 + H^2 R_{\omega}^2, \quad \Delta_{\xi}(u) = \left( R_{\omega}^2 - 1 + \frac{R_m R_{\omega}^4}{R_g^2} u \right) \cos \gamma - H R_{\omega} \sin \gamma, \\
\Delta_{\eta}(u) &= H R_{\omega} \cos \gamma + \left( R_{\omega}^2 - 1 + \frac{R_m R_{\omega}^4}{R_g^2} u \right) \sin \gamma, \\
(1-u^2) \left[ \left( R_{\omega}^2 - 1 + \frac{R_m R_{\omega}^4}{R_g^2} u \right)^2 + H^2 R_{\omega}^2 \right] &= \frac{R_m^2 R_{\omega}^8}{R_g^4} e_0^2 u^2. \quad (7.53)
\end{aligned}$$

Введена у розглядання ефективність роботи АБД:

$$n = \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_0} = \sqrt{\frac{\Delta(0)}{\Delta(u)}}, \quad \tilde{r} = \sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2} = \frac{R_m R_{\omega}^2 e_0}{\sqrt{\Delta(u)}}, \quad \tilde{r}_0 = \frac{R_m R_{\omega}^2 e_0}{\sqrt{\Delta(0)}}. \quad (7.54)$$

Усталені рухи запропоновано розрізняти за граничними положеннями КВ відносно ротора при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання ротора ( $R_{\omega} \gg 1$ ). На рис. 7.25, а-г зображені граничні положення КВ в усталених рухах системи у випадку дисбалансу, який КВ може зрівноважити ( $e_0 < 1$ ), а на рис. 7.25, д, е - якого пристрій зрівноважити не може ( $e_0 \geq 1$ ).

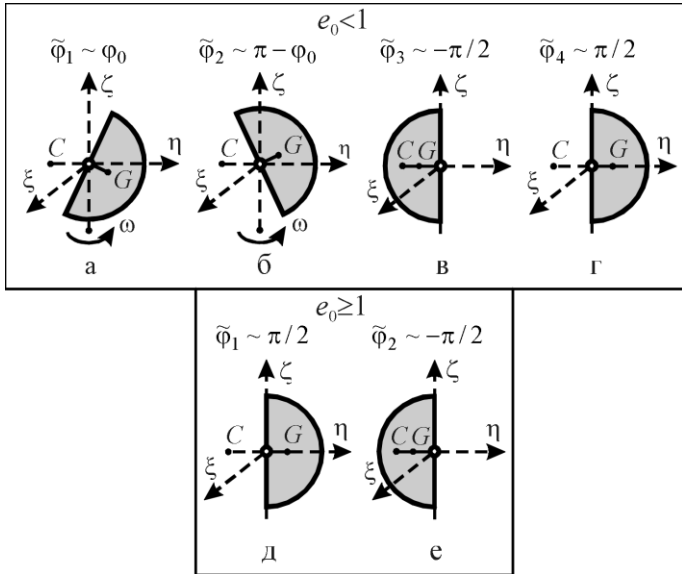


Рис. 7.25. Граничні положення КВ відносно ротора, випадки:  
 $e_0 < 1$  - а, б - основні рухи, в, г - побічні;  
 $e_0 \geq 1$  - д - основний рух, е - побічний

У випадку, коли  $e_0 < 1$ , існують не більше чотирьох істотно відмінних усталених рухів (рис. 7.25, а-г):

- $\tilde{\varphi}_1 \sim \varphi_0$  - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ нижче точки підвісу (рис. 7.25, а);
- $\tilde{\varphi}_2 \sim \pi - \varphi_0$  - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ вище точки підвісу (рис. 7.25, б);
- $\tilde{\varphi}_3 \sim -\pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений у важкий бік ротора (рис. 7.25, в);
- $\tilde{\varphi}_4 \sim \pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений в легкий бік ротора (рис. 7.25, г).

У випадку, коли  $e_0 \geq 1$  існують два істотно відмінних усталених рухи (рис. 7.25, д,е):

- $\tilde{\varphi}_1 \sim \pi/2$  - основний рух, у якому КВ відхилений в легкий бік ротора (рис. 7.25, д);
- $\tilde{\varphi}_2 \sim -\pi/2$  - побічний рух, у якому КВ відхилений у важкий бік ротора (рис. 7.25, е).

У випадку  $e_0 < 1$  і при відсутності сил зовнішнього опору ( $H=0$ ) знайдені наступні умови існування усталених рухів:

$$\begin{aligned} 0 \leq e_0 < e_0^* : \tilde{\varphi}_{1,4} \exists \forall R_\omega \in (R_{\omega 1}, +\infty); \quad \tilde{\varphi}_{2,3} \exists \forall R_\omega \in (0, +\infty), \\ e_0^* < e_0 < 1 : \tilde{\varphi}_1 \exists \forall R_\omega \in (R_{\omega 1}, +\infty); \quad \tilde{\varphi}_2 \exists \forall R_\omega \in (0, R_{\omega 2}) \cup (R_{\omega 3}, +\infty); \\ \tilde{\varphi}_3 \exists \forall R_\omega \in (0, +\infty); \quad \tilde{\varphi}_4 \exists \forall R_\omega \in (R_{\omega 1}, R_{\omega 2}) \cup (R_{\omega 3}, +\infty). \end{aligned} \quad (7.55)$$

В умовах (7.55):

$$\begin{aligned} e_0^* &= \left[ 1 - \left( \frac{R_g^2}{4R_m} \right)^{2/3} \right]^{3/2}, \quad R_{\omega 1} = \sqrt{\frac{\sqrt{R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_k} - R_g^2}{2R_m \cos^3 \varphi_k}}, \\ \forall e_0 : e_0^* < e_0 < 1 \exists R_{\omega 2,3} &= \sqrt{\frac{R_g^2 \mp \sqrt{R_g^4 - 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_k}}{2R_m \cos^3 \varphi_k}}, \\ \forall e_0 : e_0^* < e_0 < 1 \exists R_{\omega 2,3} &= \sqrt{\frac{R_g^2 \mp \sqrt{R_g^4 - 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_k}}{2R_m \cos^3 \varphi_k}}, \\ \varphi_k &= \arcsin e_0^{1/3}, \quad 0 < R_{\omega 1} < 1 (< R_{\omega 2} < R_{\omega 3}). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Встановлені наступні властивості усталених рухів  $\tilde{\varphi}_{3,4}$ :

$$\forall |R_\omega| < 1: |\tilde{\varphi}_3| < \pi/2, \tilde{\varphi}_4 < \pi/2, \quad \forall |R_\omega| > 1: |\tilde{\varphi}_3| > \pi/2, \tilde{\varphi}_4 > \pi/2, \quad (7.57)$$

тобто на дорезонансних швидкостях обертання ротора у побічних рухах  $\tilde{\varphi}_{3,4}$  центр мас КВ під точкою підвісу, а на зарезонансних – над.

У випадку  $e_0 \geq 1$  знайдені наступні умови існування і властивості усталених рухів  $\tilde{\varphi}_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} \forall e_0 > 1, R_\omega \in (0, +\infty) \exists \tilde{\varphi}_{1,2}: \\ \forall |R_\omega| < 1: \tilde{\varphi}_1 > \pi/2, |\tilde{\varphi}_2| < \pi/2, \quad \forall |R_\omega| > 1: \tilde{\varphi}_1 < \pi/2, |\tilde{\varphi}_2| > \pi/2, \end{aligned} \quad (7.58)$$

тобто рухи існують завжди, причому на дорезонансних швидкостях обертання ротора у основному русі  $\tilde{\varphi}_1$  центр мас КВ над точкою підвісу, а у побічному русі  $\tilde{\varphi}_2$  – під, а на зарезонансних швидкостях – навпаки.

У випадку  $e_0 < 1$  і за наявності сил зовнішнього опору знайдені наступні розкладання кутів  $\tilde{\varphi}_i$  чи їх косинусів за степенями малого параметра:



$$0 < R_\omega \ll 1: \exists \tilde{\varphi}_2 = \pi + \tilde{\varphi}_3, \quad \tilde{\varphi}_3 = -\frac{R_m R_\omega^4 e_0}{R_g^2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{H^2}{2} \right) R_\omega^2 \right] + \dots;$$

$$R_\omega \sim 1: \exists \tilde{\varphi}_1 \approx \arccos \sqrt{u_1}, \quad \tilde{\varphi}_2 \approx \pi - \arccos \sqrt{u_1},$$

$$u_1 = \frac{\cos^2 \varphi_0 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{(\cos^2 \varphi_0 - b^2)^2}{4} + b^2}, \quad b^2 = \frac{H^2 R_g^4}{R_m^2};$$

$$R_\omega \gg 1 \quad (\nu = 1/R_\omega \ll 1):$$

$$\tilde{\varphi}_1: \cos \tilde{\varphi}_1 = \cos \varphi_0 + \frac{R_g^2 \nu^2}{R_m \cos^2 \varphi_0} + \dots,$$

$$\tilde{\varphi}_2: \cos \tilde{\varphi}_2 = -\cos \varphi_0 + \frac{R_g^2 \nu^2}{R_m \cos^2 \varphi_0} + \dots,$$

$$\tilde{\varphi}_3: \cos \tilde{\varphi}_3 = -\frac{R_g^2 \nu^2}{R_m (1 + \sin \varphi_0)} + \dots, \quad \tilde{\varphi}_4: \cos \tilde{\varphi}_4 = -\frac{R_g^2 \nu^2}{R_m (1 - \sin \varphi_0)} + \dots;$$

$$\varphi_0 = \arcsin e_0 \quad (\sin \varphi_0 = e_0, \quad \cos \varphi_0 = \sqrt{1 - e_0^2}). \quad (7.59)$$

У випадку  $e_0 \geq 1$  і за наявності сил зовнішнього опору знайдені наступні розкладання кутів  $\tilde{\varphi}_i$  чи їх косинусів за степенями малого параметра:

$$0 < R_\omega \ll 1: \tilde{\varphi}_1 = \pi + \tilde{\varphi}_2, \quad \tilde{\varphi}_2 = -\frac{R_m R_\omega^4 e_0}{R_g^2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{H^2}{2} \right) R_\omega^2 \right] + \dots;$$

$$R_\omega \sim 1: \quad \tilde{\varphi}_1 \approx \arccos \sqrt{u_1}, \quad \tilde{\varphi}_2 \approx \pi - \arccos \sqrt{u_1},$$

$$u_1 = \frac{1 - e_0^2 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{(1 - e_0^2 - b^2)^2}{4} + b^2}, \quad b^2 = \frac{H^2 R_g^4}{R_m^2};$$

$$R_\omega \gg 1 \quad (\nu = 1/R_\omega \ll 1):$$

$$\tilde{\varphi}_1: \cos \tilde{\varphi}_1 = \frac{R_g^2 \nu^2}{R_m (e_0 - 1)} + \dots, \quad \tilde{\varphi}_2: \cos \tilde{\varphi}_2 = -\frac{R_g^2 \nu^2}{R_m (e_0 + 1)} + \dots. \quad (7.60)$$

Для настання автобалансування необхідно, щоб на певному інтервалі кутових швидкостей обертання ротора для будь-якого дисбалансу принаймні один основний рух був асимптотично стійким, а всі побічні – нестійкими, або не існували.

Досліджена стійкість ustalених рухів відносно змінних

$$x, y, \varphi, \psi, p = \dot{\theta}, \quad \tilde{p} = 0. \quad (7.61)$$

Введений збурений рух у вигляді

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \quad \xi = -\frac{R_g^2}{R_\omega^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi} + u, \quad \eta = \frac{R_g^2}{R_\omega^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi} + v, \quad p = p. \quad (7.62)$$

За лінійаризованими рівняннями одержане характеристичне рівняння

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & a_{11} \bar{a}_{11} [(a_{33} \bar{a}_{33} - a_{34}^2) a_{55} + \lambda (a_{33} + \bar{a}_{33} - 2a_{34}) a_{55}^2] - \\ & - 2R_m [(a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) a_{35}^2 \lambda + (a_{11} \bar{a}_{13}^2 a_{33} + \bar{a}_{11} a_{13}^2 \bar{a}_{33}) a_{55}] + \\ & + 4R_m^2 a_{13}^2 \bar{a}_{13}^2 a_{55} = 0, \end{aligned} \quad (7.63)$$

де:

$$\begin{aligned} a_{11} = & (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \\ a_{33} = & \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} \right) \left( \lambda^2 + h\lambda + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \right) + 2iR_\omega \lambda, \\ a_{34} = & \left( \lambda^2 + h\lambda + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \right) \operatorname{tg}^2 \tilde{\varphi}, \quad a_{35} = R_\omega \operatorname{tg} \tilde{\varphi}, \quad a_{55} = \lambda + h, \end{aligned} \quad (7.64)$$

причому в (7.63) знак комплексного спряження над  $a_{ij}$  до  $\lambda$  не відноситься.

Стійкість чи нестійкість усталених рухів визначалася за дійсними частинами коренів характеристичного рівняння (7.63). При цьому корені визначалися у вигляді асимптотичних рядів за степенями малих параметрів.

У випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора і вплив сил ваги незначний:

$$R_m \sim \varepsilon^2, \quad R_g \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (7.65)$$

Корені у нульовому наближенні

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(1/2)} = & -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega, \quad \lambda_0^{(3/4)} = -\frac{H}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega, \\ \lambda_0^{(5/6)} = & -h \pm iR_\omega, \quad \lambda_0^7 = -h, \quad \lambda_0^{(8/9)} = 0. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Нульові корені  $\lambda^{(8/9)}$  у першому наближенні визначає таке рівняння

$$h(h^2 + R_\omega^2) \lambda^2 \cos^2 \tilde{\varphi} + R_g (R_\omega^2 \sin^2 \tilde{\varphi} + 2h^2) \lambda \cos \tilde{\varphi} + hR_g^2 = 0. \quad (7.67)$$

Умова асимптотичної стійкості (нестійкості) усталеного руху

$$\cos \tilde{\varphi} > 0, \quad |\tilde{\varphi}| < \pi/2, \quad (\cos \tilde{\varphi} < 0, \quad |\tilde{\varphi}| > \pi/2). \quad (7.68)$$

З врахуванням властивостей усталених рухів зроблені такі висновки:

1) у випадку дисбалансу, який КВ може зрівноважити ( $e_0 < 1$ ): на дорезонансних швидкостях обертання ротора асимптотично стійкий

перший побічний рух  $\tilde{\varphi}_3$ , нестійкий другий основний рух  $\tilde{\varphi}_2$  і можуть бути стійкими рухи  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_4$  за умови існування ( $R_\omega^{(1)} < R_\omega < 1$ ); на зарезонансних швидкостях єдиний асимптотично стійкий - перший основний рух  $\tilde{\varphi}_1$ ;

2) у випадку дисбалансу, який КВ не може зрівноважити ( $e_0 > 1$ ): на дорезонансних швидкостях обертання ротора асимптотично стійкий побічний рух  $\tilde{\varphi}_2$  і нестійкий основний рух  $\tilde{\varphi}_1$ ; на зарезонансних швидкостях - навпаки;

3) явище автобалансування настає на зарезонансних швидкостях обертання ротора.

У випадку ротора, що швидко обертається

$$R_\omega \gg 1, \quad v = 1/R_\omega, \quad v \ll 1 \quad (7.69)$$

характеристичне рівняння подано у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta(\mu) = & b_{11}\bar{b}_{11} \left[ (b_{33}\bar{b}_{33} - b_{34}^2)b_{55} + \mu(b_{33} + \bar{b}_{33} - 2b_{34})\frac{1-u^2}{u^2} \right] - \\ & - 2R_m \left[ (b_{11}\bar{b}_{13}^2 + \bar{b}_{11}b_{13}^2)\frac{1-u^2}{u^2} \mu + (b_{11}\bar{b}_{13}^2\bar{b}_{33} + \bar{b}_{11}b_{13}^2b_{33})b_{55} \right] + \\ & + 4R_m^2 b_{13}^2 \bar{b}_{13}^2 b_{55} = 0. \end{aligned} \quad (7.70)$$

де:

$$b_{11} = (\mu + i)^2 + Hv(\mu + i) + v^2, \quad b_{13} = (\mu + i)^2, \quad b_{33} = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \left(\mu^2 + hv\mu + \frac{v^2}{u}\right) + 2i\mu,$$

$$b_{34} = \left(\mu^2 + hv\mu + \frac{v^2}{u}\right) \frac{1-u^2}{u^2}, \quad b_{55} = \mu + vh,$$

$$\mu = \lambda/v, \quad u = \cos \tilde{\varphi}_j, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (7.71)$$

причому в (7.70) знак комплексного спряження над  $b_{ij}$  до  $\mu$  не відноситься.

Досліджена стійкість основних усталених рухів  $\tilde{\varphi}_{1,2}$  ( $e_0 < 1$ ).

Розкладання коренів характеристичного рівняння (7.70) за степенями  $v$  отримані з використанням розкладань (7.59) і мають вигляд

$$\mu^{(1/2)} \approx -\frac{H}{2}v \pm i \left[ v \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + 1 \right], \quad \mu^{(3/4)} \approx -\frac{H}{2}v \pm i \left[ v \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - 1 \right],$$

$$\mu^{(5/6)} \approx -\frac{v}{2(1-R_m)(1-R_m \cos^2 \tilde{\varphi})} \times \left\{ \frac{h[\sin^2 \tilde{\varphi} + 2R_m^2(1-R_m) \cos^4 \tilde{\varphi}]}{\sin^2 \tilde{\varphi} + R_m \cos^2 \tilde{\varphi}} + HR_m[1 + (1-2R_m) \cos^2 \tilde{\varphi}] \right\} \pm i \sqrt{\frac{R_m(\sin^2 \tilde{\varphi} + R_m \cos^2 \tilde{\varphi})}{(1-R_m)(1-R_m \cos^2 \tilde{\varphi})}},$$

$$\mu^{(7/8)} \approx -hv \pm i, \quad \mu^{(9)} \approx -\frac{vhR_m \cos^2 \tilde{\varphi}}{\sin^2 \tilde{\varphi} + R_m \cos^2 \tilde{\varphi}}. \quad (7.72)$$

Основні рухи стійкі при будь-яких обмежених дисбалансах. Отже, другий основний рух  $\tilde{\varphi}_2$ , при зростанні кутової швидкості обертання ротора із нестійкого стає стійким. З умови, що це викликано зміною знака дійсного кореня, знайдені дві критичні швидкості для цього руху

$$R_{\omega 1}^* \approx 1/\sqrt{-\rho \cos \tilde{\varphi}_2}, \quad R_{\omega 2}^* \approx 1/\sqrt{-\rho \cos^3 \tilde{\varphi}_2}, \quad \rho = R_m / R_g, \quad \rho \ll 1. \quad (7.73)$$

Числові дослідження коренів характеристичного рівняння показали наступне:

$$\begin{aligned} \forall R_\omega > R_{\omega 2}^* \quad \operatorname{Re} \mu^{(i)} < 0, \quad /i = \overline{1,9}/; \\ \forall R_\omega \in (R_{\omega 1}^*, R_{\omega 2}^*) \quad \exists i \in \{1,2,\dots,9\} : \mu^{(i)} \in \mathbb{R}^1, \quad \mu^{(i)} > 0; \\ \exists e_0 < 1, \quad v(e_0) : v_1 < v(e_0) < 1, \\ \forall R_\omega \in (1/v(e_0), R_{\omega 1}^*) \quad \operatorname{Re} \mu^{(i)} < 0, \quad /i = \overline{1,9}/; \\ \forall R_\omega \in (0, 1/v(e_0)) \quad \exists i \in \{1,2,\dots,9\} : \operatorname{Re} \mu^{(i)} > 0. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Таким чином, другий основний рух: стійкий при обертанні ротора з швидкостями, більшими за  $R_{\omega 2}^*$ ; нестійкий при обертанні ротора з швидкостями між  $R_{\omega 1}^*$  і  $R_{\omega 2}^*$ ; може бути стійким при певних дисбалансах на швидкостях, менших  $R_{\omega 1}^*$ , але стійкість в цьому випадку втрачається при переході швидкості через  $1/v(e_0)$  за рахунок появи пари комплексно спряжених коренів з додатними дійсними частинами.

У випадках побічного руху  $\tilde{\varphi}_4$  ( $e_0 < 1$ ), чи основного руху  $\tilde{\varphi}_1$  ( $e_0 > 1$ ) корені характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} \mu^{(1/2)} &\approx -\frac{H}{2} v \pm i \left[ v \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + 1 \right], \quad \mu^{(3/4)} \approx -\frac{H}{2} v \pm i \left[ v \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - 1 \right], \\ \mu^{(5/6)} &\approx -\frac{1}{2} h v \frac{R_m(e_0 - 1) + 2R_g}{R_m(e_0 - 1) + R_g} \pm i \sqrt{\frac{R_m(e_0 - 1) + R_g}{R_g}}, \\ \mu^{(7/8)} &\approx -\frac{1}{2} v \frac{h + HR_m}{1 - R_m} \pm i \sqrt{\frac{R_m(e_0 - 1 + R_g)}{R_g(1 - R_m)}}, \quad \mu^{(9)} \approx -\frac{(e_0 - 1)hR_m v}{R_g + R_m(e_0 - 1)}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

З виразів для коренів можна зробити висновок, що побічний рух  $\tilde{\varphi}_4$  ( $e_0 < 1$ ) нестійкий, а основний  $\tilde{\varphi}_1$  ( $e_0 > 1$ ) – асимптотично стійкий:

$$\begin{aligned} \forall e_0 : e_0 < 1 \quad (\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_4) \quad \exists i \in \{8, 9\} : \operatorname{Re} \mu^{(i)} > 0; \\ \forall e_0 : e_0 > 1 \quad (\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1) \quad \operatorname{Re} \mu^{(i)} < 0, \quad /i = \overline{1, 9}/. \end{aligned} \quad (7.76)$$

У випадках побічних рухів  $\tilde{\varphi}_3$  ( $e_0 < 1$ ), чи  $\tilde{\varphi}_2$  ( $e_0 > 1$ ) корені характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} \mu^{(1/2)} &\approx -\frac{H}{2} v \pm i \left[ v \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + 1 \right], \quad \mu^{(3/4)} \approx -\frac{H}{2} v \pm i \left[ v \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - 1 \right], \\ \mu^{(5/6)} &\approx -\frac{1}{2} h v \frac{2R_g - R_m(e_0 + 1)}{R_g - R_m(e_0 + 1)} \pm i \sqrt{\frac{R_g - R_m(e_0 + 1)}{R_g}}, \\ \mu^{(7/8)} &\approx -\frac{1}{2} v \frac{h + HR_m}{1 - R_m} \pm i \sqrt{\frac{R_m(e_0 + 1 - R_g)}{R_g(1 - R_m)}}, \quad \mu^{(9)} \approx \frac{(e_0 + 1)hR_m v}{R_g - R_m(e_0 + 1)}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

З вигляду коренів можна зробити висновок, що рухи нестійкі:

$$\forall e_0 > 0 \quad (e_0 < 1, \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_3; e_0 > 1, \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_2) \quad \exists i \in \{8, 9\} : \operatorname{Re} \mu^{(i)} > 0. \quad (7.78)$$

Остаточо, у випадку ротора, що швидко обертається ( $R_\omega \gg 1$ ), можна зробити наступні висновки:

1) у випадку дисбалансу, який КВ може зрівноважити ( $e_0 < 1$ ), основні рухи  $\tilde{\varphi}_{1,2}$  асимптотично стійкі, а побічні  $\tilde{\varphi}_{3,4}$  - нестійкі;

2) у випадку дисбалансу, який КВ не може зрівноважити ( $e_0 > 1$ ), основний рух  $\tilde{\varphi}_1$  асимптотично стійкий, а побічний  $\tilde{\varphi}_2$  - нестійкий;

3) на великих швидкостях обертання ротора настає автобалансування.

За результатами досліджень двох важливих з точки зору практики випадків зроблений висновок про настання автобалансування на зарезонансних швидкостях обертання ротора.

Чисельно досліджений вплив на ефективність зрівноваження ротора АБД зміни параметрів  $H$ ,  $R_m$ ,  $R_g$ ,  $e_0$  (рис. 7.26).

$$H = 0,3 \quad R_m = 0,1 \quad R_g = 0,3 \quad e_0 = 0,5$$

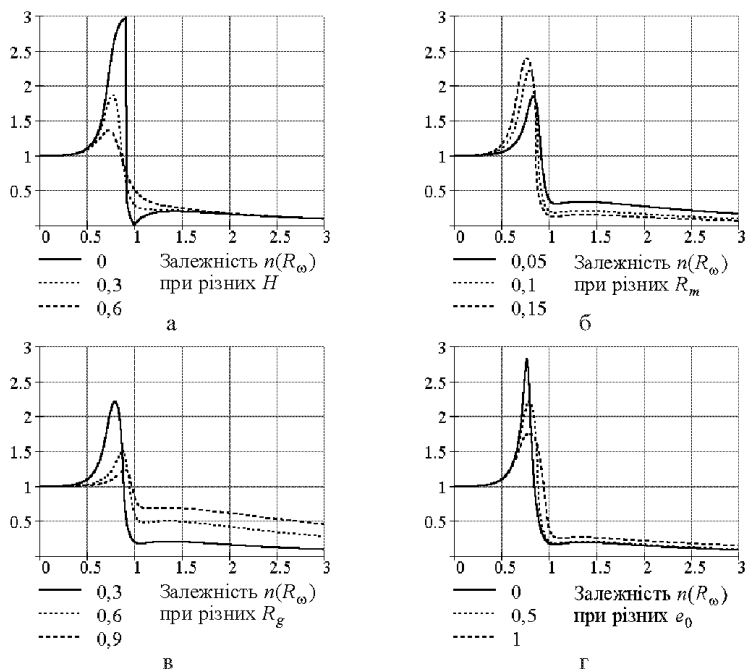


Рис. 7.26. Вплив на ефективність зрівноваження ротора зміни параметрів  $H$ ,  $R_m$ ,  $R_g$ ,  $e_0$

Встановлено, що: збільшення зовнішніх сил опору  $H$ , впливу сил ваги  $R_g$  чи початкового дисбалансу  $e_0$  покращує ефективність на дорезонансних швидкостях обертання ротора і погіршує на зарезонансних; збільшення маси КВ у порівнянні з масою ротора  $R_m$  погіршує ефективність зрівноваження ротора на дорезонансних швидкостях обертання ротора і покращує на зарезонансних.

На рис. 7.27 наведені графіки ефективності зрівноваження ротора при різних чутливості КВ до сил ваги - при різних  $R_g$ .

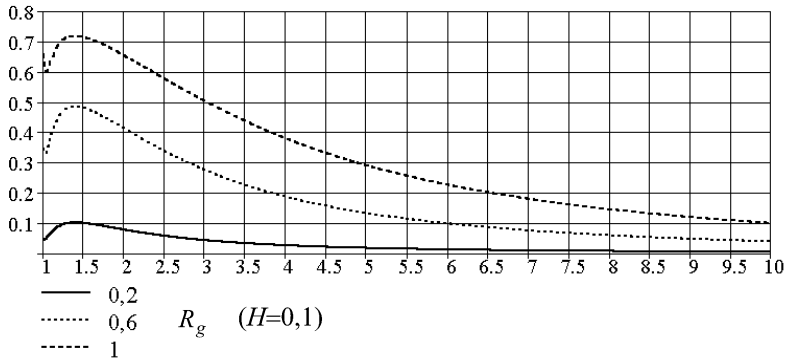


Рис. 7.27. Залежність ефективності зрівноваження ротора на резонансних швидкостях від сил ваги - параметра  $R_g$

Встановлено, що: в околі резонансної кутової швидкості обертання ротора ефективність має локальний мінімум, тобто АБД майже повністю зрівноважує ротор; на швидкостях обертання ротора, які приблизно у 1,5 рази перевищують резонансну швидкість, ефективність має локальний максимум, тобто АБД найгірше зрівноважує ротор; 3) чутливість КВ до сил ваги помітно долається при перевищенні швидкістю обертання ротора резонансної швидкості у 3 (малі  $R_g$ )÷10 (великі  $R_g$ ) разів.

Досліджений вплив сил сухого тертя на величину залишкового дисбалансу. Припускалося, що ротор обертається з швидкістю, що набагато більша резонансної частоти і вплив сил ваги незначний

$$R_{\omega} \gg 1, \quad R_g \approx 0. \quad (7.79)$$

На рис. 7.28, а побудована розрахункова схема для визначення головного вектора  $\vec{F}_{\text{ін}}$  і головного моменту  $M_{\text{ін}}$  сил інерції, що діють на КВ в залежності від відхилення вала від осі обертання  $r$ , і кута відхилення вектора дисбалансу  $\vec{KG}$  КВ від вертикалі -  $\varphi$ .

На рис. 7.28, б-е зображені розрахункові схеми для дослідження рівноваги КВ у різних випадках надання йому сферичного руху: б, в - кардановий підвіс; г - КВ у сфері; д - сферичний шарнір для невеликих, е - великих кутів відхилення  $\varphi$ .

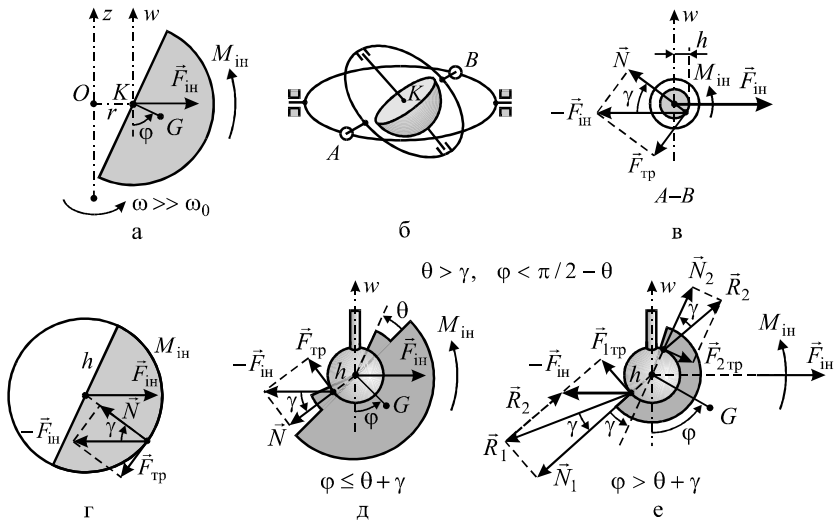


Рис. 7.28. Розрахункові схеми для дослідження впливу сил сухого тертя на якість зрівноваження ротора

На рис. 7.28:  $\vec{N}$ ,  $\vec{N}_{1,2}$  - нормальні реакції;  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_{1,2}$  - сили сухого тертя;  $h$  - плече, яке мають сили сухого тертя відносно нерухомої точки на осі вала;  $\gamma$  - кут сухого тертя;  $\theta$  - кут, який задає величину обхвату кульки сферичного шарніру тілом шарніру;  $\vec{R}_{1,2}$  - повні реакції сферичного шарніру у випадку, коли  $\varphi > \theta + \gamma$ .

Одержані формули, що виражають зв'язок між залишковим  $s_{зл}$  і повним  $s$  дисбалансами у параметричному вигляді для КВ у сфері, з сферичним шарніром, або у кардановому підвісі:

$$s_{зл} = \frac{R_f \sin \varphi}{R_m (\cos \varphi - R_f)}, \quad s = \left[ 1 + \frac{R_f}{R_m (\cos \varphi - R_f)} \right] \sin \varphi, \quad \varphi: s \leq 1, \quad (7.80)$$

$$R_f = \frac{hf}{l\sqrt{1+f^2}}, \quad 0 \leq \varphi < \arccos R_f. \quad (7.81)$$

В формулі (7.81):  $f$  - коефіцієнт сухого тертя матеріалу внутрішньої сфери чи осі шарніра по матеріалу зовнішньої сфери чи об'єми шарніра;  $h$  - радіус внутрішньої сфери чи осі шарніра.

Знайдена наближена формула, що дає зв'язок між залишковим і повним дисбалансами у явному вигляді



$$s_{\text{зл}}^* = a_1 s + a_3 s^3, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$a_1 = \frac{R_f}{R_m + R_f(1 - R_m)}, \quad a_3 = \frac{R_m^3 R_f (1 - R_f)^2}{[R_m + R_f(1 - R_m)]^4}. \quad (7.82)$$

За результатами обчислень відносна похибка наближеної формули не перевищує 3%.

Для КВ, що утримується сферичним шарніром

$$s_{\text{зл}} = \frac{R_f(R_l, \gamma, \theta, \varphi) \sin \varphi}{R_m [\cos \varphi - R_f(R_l, \gamma, \theta, \varphi)]}, \quad s = \left\{ 1 + \frac{R_f(R_l, \gamma, \theta, \varphi)}{R_m [\cos \varphi - R_f(R_l, \gamma, \theta, \varphi)]} \right\} \sin \varphi,$$

$$\varphi: \quad 0 \leq \varphi < \pi/2 - \theta, \quad s \leq 1. \quad (7.83)$$

У формулах (7.83)

$$\gamma = \arctg f, \quad R_l = h/l,$$

$$R_f(R_l, \gamma, \theta, \varphi) = \begin{cases} R_l \sin \gamma, & \varphi \leq \theta + \gamma; \\ R_l [\sin(\varphi - \theta) + \sin(\varphi - \theta - \gamma)], & \theta + \gamma < \varphi < \frac{\pi}{2} - \theta, \end{cases} \quad (7.84)$$

де:  $h$  – радіус кулі шарніра;  $f$  – коефіцієнт тертя між матеріалом кулі шарніра і матеріалом КВ;  $\theta$  – кут, що характеризує величину обхвату шарніра обіймою кулі.

На рис. 7.29, для різних значень параметрів, побудовані графіки залежності залишкового дисбалансу  $s_{\text{зл}}$  від повного  $s$ . Аналіз графіків і формул, що задають відповідні зв'язки, дозволив зробити такі висновки:

1) збільшення сил сухого тертя ( $f$ ) збільшує залишковий дисбаланс, крім випадку сферичного шарніра, коли  $\theta + \gamma < \varphi < \pi/2 - \theta$ ;

2) збільшення сил сухого тертя ( $f$ ) зменшує залишковий дисбаланс у випадку сферичного шарніра, коли  $\theta + \gamma < \varphi < \pi/2 - \theta$ ;

3) збільшення відношення маси КВ до маси системи ( $R_m$ ) зменшує величину залишкового дисбалансу;

4) залишковий дисбаланс у випадках карданового підвісу чи сферичного шарніру, коли  $\varphi < \theta + \gamma$  значно менший, ніж у випадку КВ у сфері;

5) у випадку сферичного шарніру, коли  $\theta + \gamma < \varphi < \pi/2 - \theta$  величина залишкового дисбалансу значно зростає, тому використовувати сферичні шарніри, у яких  $\theta + \gamma < \pi/2 - \theta$ , недоцільно.

$$R_m = 0,1 \quad R_l = 0,3 \quad \theta = \pi/6 \quad f = 0,08$$

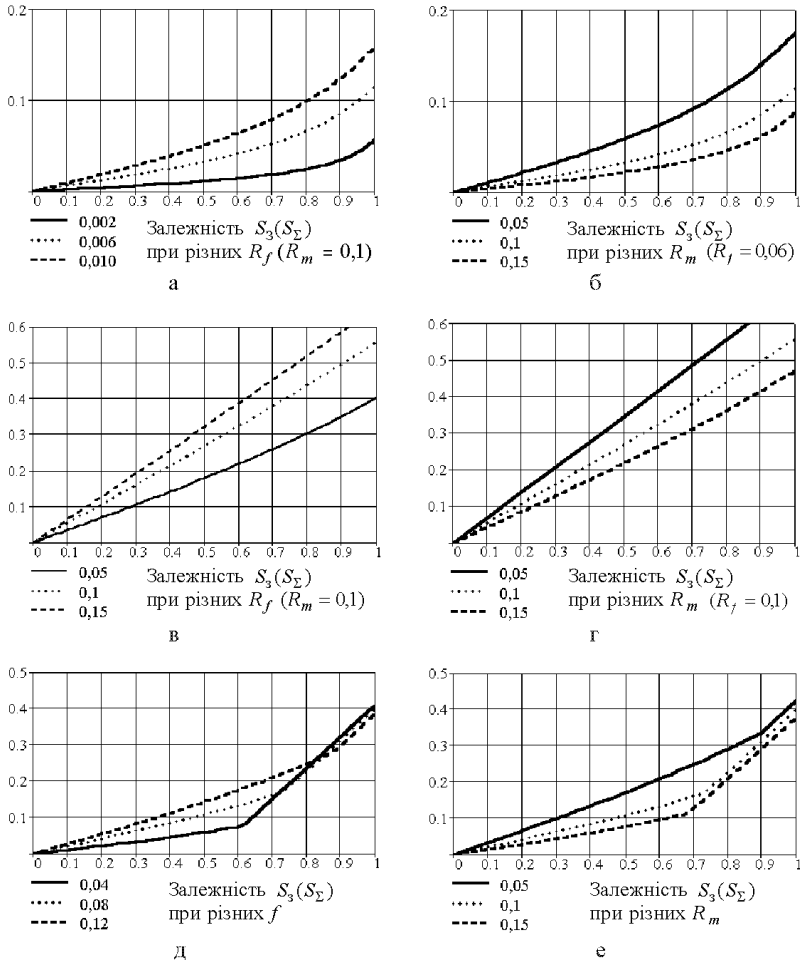
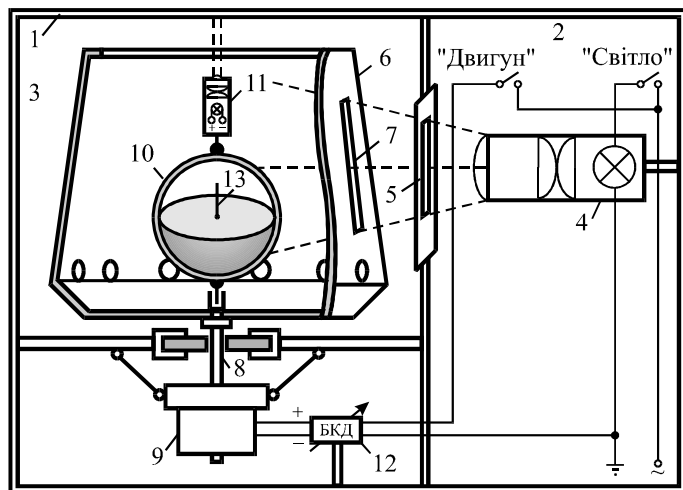


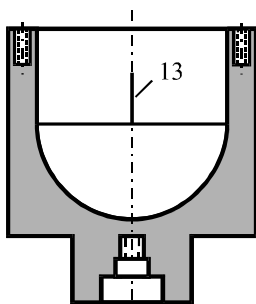
Рис. 7.29. Залежність залишкового дисбалансу від сумарного:  
 а, б - кардановий підвіс, чи сферичний шарнір, коли  $\theta + \gamma < \pi/2 - \theta$  ;  
 в, г - KB у сфері; д, е - сферичний шарнір, коли  $\theta + \gamma > \pi/2 - \theta$

### 7.2.3. Основні результати експериментальних досліджень

На рис. 7.30, а наведена схема стенда з АБД, а на рис. 7.30, б, в – схема і фотографія моделі АБД. Опис стенда і методики проведення на ньому досліджень - у розділі 4.



а



б



в

Рис. 7.30. Дослідження динаміки АБД на універсальному стенді:  
а - схема стенда з АБД; б - схема моделі АБД; в - фотографія моделі АБД

На схемі стенда позиції пронумеровані так само, як і на рис. 4.1, а. Нова позиція 13 – це покажчик. Він показує у бік, протилежний вектору дисбалансу КВ. Так, якщо центр мас КВ відхиляється у легкий бік ротора, то покажчик – у важкий, тобто у бік дисбалансу ротора. Параметри системи наступні:

$$M = 8,45 \text{ кг}, \quad m = 0,82 \text{ кг}, \quad \omega_0 = 2,87 \text{ об/с}, \quad S_{\text{АБД}} = 1250 \text{ гр}\cdot\text{см}. \quad (7.85)$$

**Зрівноваження АБД різних дисбалансів.** Досліджувалась якість зрівноваження різних дисбалансів на різних сталих кутових швидкостях обертання ротора. Встановлено, що явище автобалансування настає на зарезонансних швидкостях обертання ротора. При цьому спостерігаються такі закономірності.

1. При відсутності дисбалансу показчик вказує вертикально вгору (рис. 7.31, а). При цьому центр мас КВ знаходиться на осі обертання ротора, і тому він не вносить додаткового дисбалансу в систему. Лазерний промінь вказує в точку на екрані (рис. 7.32, а) як при наявності, так і при відсутності КВ усередині ротора.

2. При середньому дисбалансі ( $e_0 \sim 0,2 \div 0,5$ ) показчик дещо відхиляється у важкий бік ротора (рис. 7.31, б), що відповідає відхиленню центра мас КВ у легкий бік ротора. В околі резонансної швидкості відхилення показчика у важкий бік ротора досягає локального максимального значення. Потім, із збільшенням кутової швидкості обертання ротора, це відхилення зменшується. На швидкостях, що приблизно у 1,3÷1,5 разів більші за резонансну ( $3,73 \div 4,30 \text{ об/с}$ ) відхилення показчика у важкий бік ротора досягає локального мінімального значення. Потім, із зростанням кутової швидкості обертання ротора, відхилення показчика у важкий бік ротора постійно зростає. На швидкостях, більших за резонансну у 7÷10 разів ( $20 \div 28 \text{ об/с}$ ) показчик припиняє відхилятися і подальше положення КВ відносно ротора вже не залежить від швидкості обертання ротора.

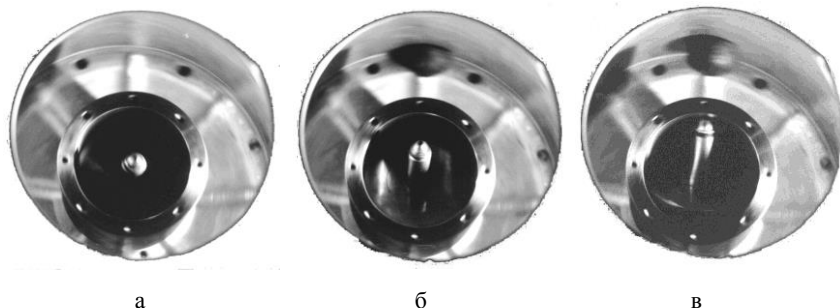


Рис. 7.31. Зрівноважування автобалансиром різних дисбалансів:  
а - дисбалансу немає; б - середній дисбаланс; в - великий дисбаланс

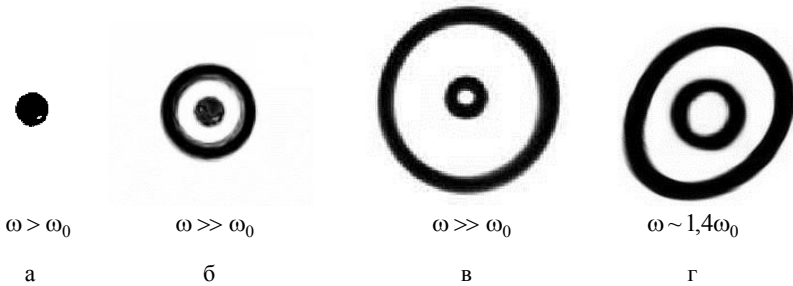


Рис. 7.32. Сліди лазерного променя на екрані при наявності і відсутності КВ в автобалансирі:

а - малий дисбаланс; б - великий дисбаланс і велика швидкість обертання ротора;  
в - великий дисбаланс і мала швидкість обертання ротора

Лазерний промінь на навколо резонансних швидкостях обертання ротора практично вказує в одну точку. Потім, із збільшенням кутової швидкості обертання ротора, лазерний промінь починає описувати коло, діаметр якого збільшується із зростанням кутової швидкості обертання ротора. На швидкостях, що приблизно у 1,3÷1,5 разів перевищують резонансну, радіус кола - найбільший. Потім, із зростанням кутової швидкості обертання ротора, радіус кола від лазерного променя постійно зменшується. При перевищенні резонансної швидкості у 7÷10 разів коло фактично вироджується у точку. При відсутності КВ у АБД лазерний промінь описує коло середнього діаметра (рис. 7.32, б), причому на зарезонансних швидкостях обертання ротора діаметр кола прямує до найбільшого значення при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання ротора.

Замірювання діаметрів кіл при одному дисбалансі, але при відсутності і наявності КВ усередині АБД і їх порівняння дозволяє зробити висновки, що відразу на зарезонансних швидкостях обертання ротора АБД зменшує відхилення вала від осі обертання не менше ніж у два рази, а при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання ротора - більше ніж у 4÷5 разів. Але остання оцінка обмежена розмірами точки лазерного променя і тому не є достатньо точною.

3. При зрівноваженні великих дисбалансів ( $e_0 \sim 0,7 \div 1$ ) покажчик відхиляється у важкий бік ротора (рис. 7.31, в), що відповідає відхиленню центра мас КВ у легкий бік. В околі резонансної швидкості відхилення покажчика у важкий бік ротора досягає локального максимального значення. Потім, із збільшенням кутової швидкості обертання ротора, це відхилення зменшується. На швидкостях, що приблизно у 1,3÷1,5 разів перевищують резонансну частоту, відхилення покажчика у важкий бік ротора досягає локального мінімального значення. Потім, із зростанням

кутової швидкості обертання ротора, відхилення покажчика у важкий бік ротора постійно зростає. При перевищенні резонансної швидкості у 7÷10 разів покажчик припиняє відхилятися і подальше положення КВ відносно ротора вже не залежить від величини швидкості обертання ротора.

Лазерний промінь на навколо резонансних швидкостях обертання ротора описує невелике коло. Потім, із збільшенням кутової швидкості обертання ротора, діаметр цього кола збільшується. На швидкостях, що приблизно у 1,3÷1,5 разів перевищують резонансну частоту, радіус кола досягає локального максимального значення (рис. 7.32, г). Потім, із зростанням кутової швидкості обертання ротора, радіус кола від лазерного променя постійно зменшується. При перевищенні резонансної швидкості у 7÷10 разів діаметр кола фактично перестає змінюватися і досягає найменшого значення. При відсутності КВ у АБД лазерний промінь описує коло (фігуру, подібну колу) великого діаметра (рис. 7.32, в, г), причому на зарезонансних швидкостях обертання ротора діаметр кола прямує до найбільшого значення при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання ротора.

Замірювання діаметрів кіл при однаковому дисбалансі, але при відсутності і наявності КВ у АБД і порівняння їх дозволяє зробити висновки, що відразу на зарезонансних швидкостях обертання ротора АБД зменшує відхилення вала від осі обертання не менше ніж у два рази, а при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання ротора - у 5÷6 разів. Остання оцінка є об'єктивною, оскільки на неї не вплинули розміри точки лазерного променя.

Експерименти також показали, що розмір залишкового дисбалансу на великих швидкостях обертання ротора ( $\omega > 10\omega_0$ ) майже лінійно залежить від величини дисбалансу, який зрівноважується - чим більше дисбаланс, що зрівноважується, тим більше залишковий дисбаланс. При зрівноважуванні малих дисбалансів залишковий дисбаланс практично відсутній, тому лазерний промінь вказує у своє статичне положення (рис. 7.32, а). При зрівноважуванні найбільших дисбалансів, що може зрівноважити АБД, розмір залишкового дисбалансу найбільший. Тому промінь лазера описує на горизонтальному екрані коло, однак його діаметр у 5-6 разів менший, ніж діаметр цього кола при відсутності КВ в АБД (рис. 7.32, в). Пояснюється це зростанням тиску КВ на корпус АБД при зростанні дисбалансу. При цьому зростає тертя між КВ і корпусом, що знижує точність балансування.

Режим автобалансування стійкий до зовнішніх збурень. На великих швидкостях обертання ротора на положення КВ мало впливають зовнішні силові дії на ротор або гальмування ротора.

**Дослідження усталених рухів системи при обертанні ротора із сталими кутовими швидкостями.** Шляхом спостереження за КВ у

стробоскопічному освітленні встановлено, що при обертанні ротора із сталою кутовою швидкістю встановлюється певний рух системи, який характеризується певним положенням чи рухом КВ відносно ротора.

1. На невеликих дорезонансних швидкостях обертання ротора ( $\omega=0\div0,5\omega_0$ ) КВ займає нейтральне положення відносно ротора, тобто практично не відхилений (рис. 7.33, а). Лазерний промінь на згаданому інтервалі кутових швидкостей обертання ротора практично вказує в одну точку на екрані - у своє статичне положення.

2. При наближенні кутової швидкості обертання ротора до резонансної частоти ( $\omega=0,5\div0,9\omega_0$ ) центр мас КВ починає відхилятися у важкий бік ротора, а покажчик - у легкий (рис. 7.33, б). Лазерний промінь починає описувати коло, радіус якого зростає разом із зростанням кутової швидкості обертання ротора.

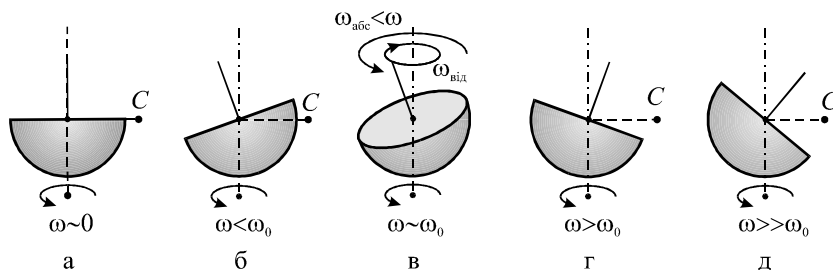


Рис. 7.33. Положення і рухи КВ відносно ротора в ustalених режимах руху системи: залежність від кутової швидкості обертання ротора  $\omega$

3. В околі резонансної кутової швидкості обертання ротора ( $\omega=0,9\div1,1\omega_0$ ) рух КВ залежить від величини в'язкого і сухого тертя між КВ і корпусом АБД.

3.1. При величині в'язкого тертя, яке робить вільний рух КВ відносно корпусу АБД неперіодичним (це відбувається навіть при використанні звичайного машинного мастила) спостерігається, що КВ займає фіксоване положення відносно ротора. При кутовій швидкості  $\omega\approx0,9\omega_0$  центр мас КВ найбільше відхилений у важкий бік ротора, а покажчик - у легкий. Із зростанням кутової швидкості обертання ротора в межах  $\omega=0,9\div1\omega_0$  центр мас КВ відхиляється у напрямку, який відстає від напрямку дисбалансу ротора. При наближенні кутової швидкості обертання ротора до резонансної ( $\omega\approx\omega_0$ ) кут між вектором дисбалансу ротора і вектором дисбалансу КВ близький до  $90^\circ$ . При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора у межах  $\omega=1\div1,1\omega_0$  кут між векторами дисбалансу ротора і КВ зростає від  $90^\circ$  до  $180^\circ$ .

При зміні кутової швидкості обертання ротора в межах  $\omega=0,9\div 1,1\omega_0$  діаметр кола, яке описує лазерний промінь значно (у 3÷6 разів) зменшується, причому, чим менша в'язкість мастила, тим менший діаметр кола.

3.2. При величині в'язкого тертя, при якому вільний рух КВ відносно корпусу АБД - коливальний (це відбувається при використанні надзвичайно рідкого машинного мастила, чи при розведенні мастила керосином) спостерігається, що КВ здійснює усталені нестационарні рухи відносно ротора. В цілому КВ відхиляється відносно ротора у той же бік, як і при густому мастилі, але покажчик здійснює кругові рухи навколо цього положення (рис. 7.33, в).

Лазерний промінь описує криву, близьку до кола. При зростанні кутової швидкості обертання ротора в межах  $\omega=0,9\div 1,1\omega_0$  діаметр кола зменшується, причому крива практично вироджується у точку.

4. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора у межах  $\omega=1,1\div 1,5\omega_0$  відхилення центра мас КВ у легкий бік ротора (відхилення покажчика у важкий бік ротора) зменшується. На швидкостях, що приблизно у 1,3÷1,5 разів перевищують резонансну частоту, відхилення досягає локального мінімального значення. Потім, із зростанням кутової швидкості обертання ротора, відхилення постійно зростає (рис. 7.33, г). При перевищенні резонансної швидкості у 7÷10 разів центр мас КВ (покажчик) припиняє відхилятися і подальше положення КВ відносно ротора вже не залежить від величини швидкості обертання ротора (рис. 7.33, д).

Лазерний промінь на навколо зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $\omega\approx 1,1\omega_0$ ) описує невелике коло. Потім, із збільшенням кутової швидкості обертання ротора (у межах  $\omega=1,1\div 1,5\omega_0$ ), діаметр цього кола збільшується. На швидкостях, що приблизно у 1,3÷1,5 разів перевищують резонансну частоту, величина радіуса кола досягає локального максимального значення. Потім, із зростанням кутової швидкості обертання ротора ( $\omega>1,5\omega_0$ ), радіус кола від лазерного променя постійно зменшується. При перевищенні резонансної швидкості у 7÷10 разів коло фактично перестає змінюватися: його діаметр досягає найменшого значення, або коло вироджується в точку.

**Дослідження режимів пуску і вибігу ротора.** Досліджені перехідні процеси під час розгону і вибігу ротора.

1. Під час пуску ротора КВ займає нейтральне положення (навіть приходить у нього, якщо початково був відхилений), що забезпечує спокійний розгін (рис. 7.34, а). Спочатку КВ відстає від ротора, але швидко утягується у обертання і здоганяє ротор. Оскільки між КВ і АБД виникає і сухе тертя, то через певний проміжок часу КВ починає обертатися синхронно з ротором, навіть при подальшому зростанні його



кутової швидкості обертання. Поки КВ відстає від ротора, він займає нейтральне положення. (рис. 7.34, б).

Явище балансування наступає на закритичних швидкостях обертання ротора, як тільки КВ доганяє ротор, навіть при зростанні кутової швидкості обертання останнього. При цьому центр мас КВ починає відхилятися у легкий бік ротора, а покажчик - у важкий (рис. 7.34, г). Відхилення центра мас КВ (покажчика) постійно зростає із зростанням кутової швидкості обертання ротора. При перевищенні швидкістю обертання ротора у  $7\div 10$  разів резонансної швидкості, зростання відхилення КВ припиняється і його положення відносно ротора вже не змінюється (рис. 7.34, д).

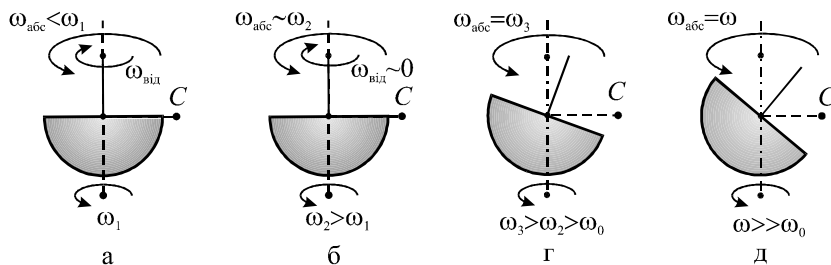


Рис. 7.34. Рухи КВ відносно ротора під час його розгону.

Під час пуску ротора лазерний промінь певний проміжок часу вказує в точку - своє статичне положення. Потім починає описувати коло, діаметр якого постійно збільшується, але на швидкостях, що не перевищують резонансну. При підході до резонансної швидкості діаметр кола досягає абсолютного максимуму. При переході резонансної швидкості коло від лазерного променя фактично миттєво вироджується у точку, а потім знову збільшується до локального максимального значення при підході кутової швидкості до величини, що у  $1,3\div 1,5$  разів перевищує резонансну швидкість. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора діаметр кола постійно зменшується. При перевищенні швидкістю обертання ротора резонансної швидкості у  $7\div 10$  разів, діаметр кола перестає змінюватися, і коло досягає найменшого діаметра, чи вироджується в точку.

Шляхом зміни напруги, що подається на двигун, змінювалася потужність, а разом з цим і проміжок часу, за який відбувався розгін. При швидкому розгоні описана вище поведінка КВ усередині ротора і лазерного променя менш характерні. Слід відзначити, що навіть при невеликому в'язкому терті між КВ і корпусом АБП, КВ швидко утягується в обертання разом з ротором і балансування наступає за мінімальний проміжок часу 2-4 с, навіть під час розгону ротора. У

момент пуску ротора його коливання разом із КВ більш значні, ніж без них. На зарезонансних швидкостях розгін ротора при наявності КВ у АБД більш спокійний, ніж при його відсутності.

При вибігу ротора автобалансування спостерігається до швидкостей, що не перевищують резонансну частоту. КВ і лазерний промінь поведуть себе так, як під час розгону ротора, але все відбувається у оберненій послідовності. Оскільки вибіг ротора відбувається повільніше, ніж його розгін, то явища, які спостерігалися під час розгону, під час вибігу більш виражені.

При повільному розгоні або вибігу ротора спостерігаються дві характерні швидкості, перша з котрих нижче, а друга вище резонансної частоти обертання ротора. На швидкостях нижче першої характерної КВ відхилення у важкий бік ротора. Між першою і другою - КВ починає відставати від ротора, у зв'язку з чим обертається відносно нього в бік, протилежний обертанню ротора. На швидкостях, що вище другої характерної швидкості, настає явище автобалансування. Існування двох характерних швидкостей пояснюється тим, що в околі резонансної швидкості у АБП не існують побічні усталені рухи. Їм починають відповідати певні нестационарні рухи, які, як впливає з експерименту, стійкі. Те, що в околі резонансної швидкості усталені рухи стають нестационарними, пояснюється наступним. Через наявність зовнішнього тертя (у підвісці ротора), в околі резонансної швидкості, вектор відхилення вала найбільше не збігається з напрямком вектора дисбалансу. Тому КВ відхиляється не у важкий або легкий бік ротора, а дезорієнтований і робить кругові прецесійні рухи усередині ротора. При малих дисбалансах характерні швидкості практично зливаються з резонансною частотою, а при збільшенні дисбалансів віддаляються від неї.

Слід зазначити, що режими розгону і вибігу ротора з АБД значно спокійніші, ніж у випадку для ротора з кульовим АБП. Пояснюється це тим, що КВ у момент пуску ротора займає нейтральне положення і не вносить додатковий дисбаланс у систему. При вибігу ротора, під дією сил ваги, КВ так само прямує до нейтрального положення, що робить процес вибігу спокійним. Однак сили ваги погіршують якість балансування ротора АБД на малих зарезонансних швидкостях обертання ротора. На рисунку 7.33, в показані сліди лазерного променя при великому дисбалансі і великій швидкості обертання ротора (50 об/с), а на рисунку 7.33, г ці ж сліди при малій зарезонансній швидкості обертання ротора (6 об/с). Видно падіння якості балансування більш ніж у два рази. Однак на малих швидкостях обертання ротора вібрації від дисбалансу незначні.

**Дослідження впливу сухого тертя.** Експериментально було встановлено явище прилипання КВ до корпусу АБД. Воно полягає у

тому, що якщо КВ перестає рухатись відносно ротора, то через певний проміжок часу (30-60 с) спостерігається прилипання КВ до напрямної, і потім АБД перестає реагувати на поточну зміну дисбалансу ротора, поки дисбаланс не зміниться на певну граничну величину. Ця гранична величина тим більша, чим більший поточний дисбаланс ротора.

Як показали експерименти, у зв'язку з цим явищем у системі може накопичитися дисбаланс, який буде менший за поточний в 2-2,5 рази. Якщо КВ зсунеться відносно ротора, то прилипання зникає і точність балансування збільшується - залишковий дисбаланс зменшується в 5÷6 разів від початкового дисбалансу. Явище прилипання викликано появою сухого тертя між КВ і напрямною АБД. Так, під дією тиску КВ на напрямну, прошарок мастила витискається і КВ щільно притискається до напрямної, внаслідок чого виникає сухе тертя.

Для подолання явища прилипання була спробувана графітова змазка. Як показали експерименти з її використанням, в системі завжди присутнє помітне сухе тертя, але менше за те, що викликано явищем прилипання. Тому АБД завжди однаково за якістю зменшує поточний дисбаланс, але тільки в 3,5-4 рази.

**Дослідження впливу збурень різного походження на процес балансування ротора АБД.** На великих швидкостях обертання ротора ( $R_{\omega} \geq 10$ ) досліджувався вплив на процес балансування ротора збурень різного походження. Дослідження показали наступне.

1. Зміна орієнтації ротора не впливає на процес балансування ротора.
2. Бічний тиск на ротор, що імітував процес шліфування чи фрезерування і який утворювався тиском на ротор зігнутою пружною пластиною, сприймається ротором як збільшення жорсткості опор у відповідному напрямку. Тому АБД продовжує функціонувати, але на більших кутових швидкостях обертання ротора.
3. Вібрація корпусу машини приводить до коливань ротора, але фактично не впливає на положення КВ відносно ротора.
4. Раптова зміна дисбалансу (закидання усередину ротора дискретних мас, утворюючих дисбаланс) приводить як до коливань ротора, так і до зміни відносного положення КВ. Перехідні процеси, пов'язані із зміною відносного положення КВ, проходять тим швидше, чим більша кутова швидкість обертання ротора. Коливання ротора відбуваються з частотою власних коливань ротора (з резонансної частотою) і їх тривалість фактично не залежить від кутової швидкості обертання ротора.
5. Удар по корпусу машини призводить до тих же наслідків, що і раптова зміна дисбалансу.
6. Повільна зміна дисбалансу, викликана засипанням усередину ротора сипучого матеріалу за принципом пісочного годинника, приводить до

повільної зміни відносного положення КВ. Коливання ротора майже непомітні.

## Висновки розділу 7

1. Для АБП, у якого КВ повертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора, уперше одержані такі найбільш істотні результати.

а) Запропоновано усувати чутливість КВ до сил ваги в неklasичних АБП, в яких КВ повертається навколо поперечних, чи повздовжньої і поперечних осей ротора, шляхом встановлення ще одного КВ і накладання на їх рухи кінематичних в'язей. Виділені ознаки, комбінаціями яких створюються АБП, наведені приклади синтезу, досліджені масо-інерційні характеристики КВ, габаритні розміри, балансувальна ємність, тощо.

б) У рамках моделі ротора, що розташований вертикально, рухається плоскопаралельно, утримується ізотропними в'язкопружними опорами і статично зрівноважується АБП, динаміку системи описує система чотирьох звичайних автономних нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, яка залежить від дванадцяти розмірних або восьми незалежних безрозмірних параметрів.

в) У випадку дисбалансів, які може зрівноважити АБП, система має шість істотно відмінних усталених рухів – два основних, у яких ротор зрівноважений і чотири побічних, в яких ротор розбалансований. Побічні рухи діляться на дві групи: у першій – КВ найбільше відхилені у важкий чи легкий бік ротора; у другій – центри мас КВ на поздовжній осі ротора. Побічні рухи першої групи не існують в околі резонансної кутової швидкості обертання ротора. У випадку дисбалансів, які не може зрівноважити пристрій, система має один основний і три побічних усталених рухи. Побічні рухи діляться на дві групи: у першій – КВ найбільше відхилені у важкий бік ротора; у другій – центри мас КВ на поздовжній осі ротора. Необхідною умовою настання автобалансування є стійкість на робочому інтервалі кутових швидкостей обертання ротора принаймні одного основного руху і нестійкість або неіснування побічних.

г) У випадках, коли маса КВ набагато менша маси ротора, та у випадку швидкого обертання ротора, встановлено настання автобалансування на зарезонансних швидкостях обертання ротора. Встановлено, що в інших випадках автобалансування буде наступати за умови стійкості принаймні одного основного руху (в подальшому немає потреби у дослідженні стійкості побічних рухів).

д) На універсальному стенді експериментально досліджена динаміка двох створених моделей АБП із зв'язаними КВ. В першій моделі КВ

мають однакові маси, а у другій - нижній КВ має дещо меншу масу. Підтверджено настання автобалансування на зарезонансних швидкостях обертання ротора і на цих швидкостях встановлено: зменшення відхилення вала від осі обертання у 6-7 разів незалежно від швидкості обертання ротора; величина залишкового дисбалансу майже лінійно залежить від дисбалансу, що зрівноважується; тривалість перехідних процесів обернено-пропорційна кутовій швидкості обертання ротора; бічний, чи торцевий тиск на ротор сприймається як підвищення жорсткості опор у відповідному напрямку і призводить до збільшення резонансної швидкості, тощо.

е) Для першої моделі нового АБП встановлено, що при малих силах внутрішнього в'язкого опору і дисбалансах, які може зрівноважити АБП можливий квазіперіодичний рух, при якому КВ максимально відхилені, і в русі відносно ротора обертаються в бік, протилежний обертанню ротора, а відносно землі - в бік обертання ротора з кутовою швидкістю, що дорівнює резонансній частоті. Вал ротора при цьому здійснює рух, що є сумою прямої прецесії з резонансною частотою і прямої нутації з частотою обертання ротора. Для подолання цього явища запропоновано: збільшити сили в'язкого опору; виконувати нижній КВ меншої маси; частково заповнювати порожнину АБП рідкою речовиною. Встановлено, що другий варіант виконання АБП має переваги над першим, зокрема забезпечує спокійний розгін ротора, система не має побічних нестационарних усталених рухів.

ж) Теоретично встановлено, що при дисбалансах, які може зрівноважити АБП, у системи ротор-АБП існують однопараметричні сім'ї квазіперіодичних рухів, у яких КВ обертаються відносно землі майже із сталою кутовою швидкістю і відстають від ротора, а повздовжня вісь ротора рухається по гіпоциклоїді, яка є сумою прямої прецесії з цією частотою і прямої нутації з частотою обертання ротора. При цьому:

- серед усіх сімей квазіперіодичних рухів асимптотично стійкі рухи тільки тієї сім'ї, у якій КВ обертаються відносно землі із швидкістю, близькою, але дещо меншою за резонансну, причому рухи сім'ї стійкі у області власного існування;
- ця сім'я існує на швидкостях обертання ротора, менших за  $R_{\omega}^*$  з (7.41) і область існування зменшується із збільшенням сил в'язкого опору в системі;
- області стійкості квазіперіодичних і основних рухів можуть перетинатися, у зв'язку з чим необхідною умовою настання автобалансування на певних швидкостях обертання ротора є неіснування чи нестійкість згаданої вище сім'ї квазіперіодичних рухів.

2. Для АБД уперше одержані такі найбільш істотні результати.

а) Теоретично обґрунтований новий метод віброзахисту роторів, який полягає у одночасному зрівноважуванні ротора на ходу і демпфіруванні його кутових вібрацій. При цьому запропоновано використовувати відомі неklasичні КВ з нерухою точкою на поздовжній осі ротора для створення АБД. Виділені ознаки, комбінаціями яких створюються пристрої, наведені приклади синтезу, досліджені масо-інерційні характеристики КВ, габаритні розміри, балансувальна ємність тощо.

б) Побудована математична модель ротора, який розташований вертикально, рухається плоскопаралельно, утримується ізотропними в'язкопружними опорами і зрівноважується АБД. Одержана система п'яти звичайних автономних нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, що описує динаміку системи. Встановлена залежність динаміки системи від одинадцяти розмірних і семи незалежних безрозмірних параметрів.

в) У рамках моделі у випадку дисбалансів, які АБД може зрівноважити, система має не більше чотирьох істотно відмінних усталених рухів – два основних, в яких ротор найбільше зрівноважений і два побічних, в яких ротор розбалансований, причому побічні рухи не існують в околі резонансної швидкості обертання ротора. У випадку дисбалансів, які АБД не може зрівноважити, система має один основний і один побічний усталені рухи. Необхідною умовою настання автобалансування є стійкість на робочому інтервалі швидкостей обертання ротора основних усталених рухів і нестійкість побічних.

г) У випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора, автобалансування відбуватиметься на зарезонансних швидкостях обертання ротора, причому при дисбалансах, які може зрівноважити пристрій, асимптотично стійким є основний рух, у якому центр мас КВ нижче точки підвісу, а решта рухів – нестійка. Автобалансування відбуватиметься і у випадку ротора, який швидко обертається, причому якщо ємності АБД вистачає для зрівноваження ротора, стійкими є два основних усталених рухи, а решта є нестійкими.

д) Досліджена ефективність зрівноваження ротора. На дорезонансних швидкостях обертання ротора, крім навколорезонансних, пристрій збільшує відхилення вала від осі обертання, а на зарезонансних – зменшує. Повному зрівноваженню дисбалансу заважають сили ваги, але їх вплив зменшується із зростанням кутової швидкості обертання ротора. При великій чутливості КВ до сил ваги ( $R_g \sim 1$ ) останні помітно долаються на швидкостях, що у п'ять і більше разів перевищують резонансну частоту обертання ротора.

е) Досліджений вплив сил сухого тертя на величину залишкового дисбалансу. Встановлено, що залишковий дисбаланс найменший у випадку карданового підвісу чи сферичного шарніру, кулька якого значно охоплюється обоймою шарніру. Залишковий дисбаланс найбільший у випадку КВ усередині сфери і значний у випадку сферичного шарніру, кулька якого практично не охоплюється обоймою шарніру.

ж) На універсальному стенді досліджена динаміка АБД у різних режимах руху ротора і при зрівноваженні різних дисбалансів. Підтверджено настання автобалансування на зарезонансних швидкостях обертання ротора. Встановлено, що при малих силах внутрішнього тертя, в невеликому околі резонансної швидкості обертання ротора спостерігається нестационарний рух, при якому КВ у русі відносно ротора обертається в бік, протилежний обертанню ротора. Виявлене зростання впливу сил сухого тертя на залишковий дисбаланс при обертанні ротора певний проміжок часу при відсутності відносного руху КВ. Явище прилипання запропоновано долати використанням графітної змазки. На великих швидкостях обертання ротора спостерігалось зменшення початкового дисбалансу в 4-5 разів – при відсутності прилипання, в 2-2,5 при наявності, в 3,5-4 рази при використанні графітної змазки.

## ВИСНОВКИ

Найбільш істотні наукові результати, які за наявними матеріалами уперше одержані автором монографії, наступні.

1. Встановлено, що пасивні АБП з твердими КВ є матеріальними системами, які містять тверді КВ, встановлені з можливістю руху принаймні навколо однієї точки на поздовжній осі вала ротора. Знайдені геометричні і масо-інерційні характеристики КВ. Досліджена кінематика їх рухів і запропоновані нові схеми зрівноважування та віброзахисту роторів і відповідні АБП. Оцінені переваги і недоліки різних схем.

2. Створений інженерний (наближений) метод визначення умов настання автобалансування, який ґрунтується на інженерному критерії настання автобалансування: для усунення пасивним АБП з твердими КВ відхилення деякої точки поздовжньої осі ротора від осі обертання, чи для зменшення цього відхилення іншим типом пасивного АБП необхідно і достатньо, щоб ця точка під дією дисбалансу, у ній прикладеного, у середньому за один оберт ротора, відхилялася протилежно вектору дисбалансу.

3. Із застосуванням інженерного метода, для будь-якого типу АБП і різних моделей жорсткого і гнучкого ротора встановлені діапазони

кутових швидкостей обертання ротора, на яких настає автобалансування. Показано, що результати, зокрема критичні швидкості, які одержуються з використанням інженерного критерію, співпадають з відомими результатами, одержаними іншими наближеними методами для класичних АБП, узагальнюють і доповнюють їх.

4. Узагальнений досвід теоретичного дослідження процесів зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП з твердими КВ. Для роторів на ізотропних опорах розвинутий теоретичний метод, який ґрунтується на теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем. Встановлена методика і послідовність застосування методу, які дозволяють дослідити майже всі відомі явища, якими супроводжується процес віброзахисту і зрівноваження ротора згаданими АБП з глибиною, яку не можуть забезпечити інші методи.

5. Узагальнений досвід експериментального дослідження процесів зрівноваження і віброзахисту роторів пасивними АБП з твердими КВ, і створений експериментальний метод, в якому використовується стробоскопічне освітлення для спостереження за рухом КВ відносно ротора, і (лазерний) промінь, спрямований по поздовжній осі ротора – для визначення закону руху ротора, оцінки швидкості і якості його зрівноваження пасивним АБП, попереднього балансування ротора тощо.

6. Розвинутий теоретичний метод застосований для різних типів пасивних АБП з твердими КВ у рамках найбільш поширеної і актуальної моделі ротора - ротора на ізотропних опорах, який рухається плоскопаралельно. При цьому побудовані математичні моделі системи ротор-АБП, досліджені кількість, умови існування, та стійкість різних усталених рухів системи, знайдені критичні швидкості обертання ротора тощо. Створена аналітична теорія багатокільових і багатомаятникових АБП. Виявлено існування і створена теорія квазіперіодичних рухів системи ротор - АБП.

7. Експериментально досліджена динаміка АБП з різними схемами зрівноваження і віброзахисту роторів, зокрема в різних умовах експлуатації ротора і при дії збурень різного походження. Підтверджені результати теоретичних досліджень. Зокрема: встановлена працездатність нових неklasичних АБП на закритичних швидкостях обертання ротора; виявлено існування і встановлені властивості квазіперіодичних рухів системи ротор-АБП як для класичних, так і неklasичних АБП; підтверджено, що кульовий АБП зрівноважує ротор з нерухою точкою і опорою - циліндричним шарніром на швидкостях, які перевищують єдину критичну швидкість.



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Основы балансировочной техники. Том 1. Уравновешивание жестких роторов и механизмов. М.Е.Левит,...В.П.Ройзман, и др. Под ред. В.А. Щепетильникова. - М.: Машиностроение, 1975. с. 528.
2. Основы балансировочной техники. Том 2. Уравновешивание гибких роторов и балансировочное оборудование. М.Е.Левит,... В.П.Ройзман, и др. Под ред. В.А. Щепетильникова. - М.: Машиностроение, 1975. с. 679.
3. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 1 – Leblanc balancers // Machine Design, 1950a, Vol. 22 No 9, pp. 119-124.
4. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design, 1950b, Vol. 22 No 10, pp. 103-106.
5. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 3 – Designing for complete effectiveness // Machine Design, 1950c, Vol. 22 No 11, pp. 149-153.
6. Ларри Дж. Автоматическое балансирование вращающихся масс // Сб. переводов и обзоров периодической иностранной литературы. - М.: 1955. -23, -5. - С.14-19.
7. Гусаров А.А., Сусанин В.И., Шаталов Л.Н., Грушин Б.М. Автоматическая балансировка роторов машин. -М.: Наука, 1979. -151 с.
8. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. - М.: Наука, 2002. -119 с.
9. Філімоніхін Г.Б. Пасивні автобалансири з твердими коригувальними вантажами // Вісник Технологічного університету Поділля, Хмельницький, 2002, №6 Ч.1 (47), С.173-178.
10. Patent 125036 US. Improvement in Centrifugal Machines for Draining Sugar: patent 125036 US, / Fesca Albert. Patented 26.03.1872.
11. Patent 331,450, US. Centrifugal machine: patent 331,450 US, / E.Rothe. Patented Dec. 1, 1885.
12. Patent 414642 US. Self-adjusting counter-balance: patent 414642 US, / G.M.Herrick. Serial No. -307,207. Filed April 13, 1889. Patented Nov.5,1889.
13. Patent 1,314,005, US. Automatic balancing means for high speed rotors: patent 1,314,005 US, / E.W.Louden (US). Serial No. -25,368. Filed August 17, 1918. Patented Aug. 26, 1919.
14. Thearle E.L. A new type of dynamic-balancing machine // Trans. ASME (Applied Mechanics), 1932, Vol. 54, pp. 131-141.
15. Patent 2,405,404 US. Domestic appliance: patent 2,405,404 US, / Clark K. Serial No. -363,321. Filed 29.10.1940, Patented 06.08.1846.
16. Patent 1,967,163 US. Means for dynamically balancing machine tools: patent 1,967,163 US, / Thearle E.L. Serial No. -672,943. Filed May 26, 1933, Patented July 17, 1934,

17. Patent 4,433,592 US. Balancer for use in centrifugal rotary machine: patent 4,433,592 US / Hisao Tatsumi, Michiaki Ito (Japan); (Tokyo Shibaura Denci Kabushiki Kaisha). Appl. No. -411,005. Filed Aug. 24, 1982. Patented Feb. 28, 1984.
18. Patent 5,746,069 US. Clothes washing machine having upper and lower dynamic balancers: patent 5,746,069 US / Do Weon Kim (Korea); (Samsung Electronics Co., Ltd.). Appl. No. -697,567. Filed Aug. 28, 1996. Patented May 5, 1998.
19. Patent 5,806,349 US. Washing machine with ball balancer: patent 5,806,349 US / Do Weon Kim, Sung Jae Shin (Korea); (Samsung Electronics Co., Ltd.). Appl. No. -864,348. Filed May 28, 1997. Patented Sep. 15, 1998.
20. Patent 5,916,274 US. Reinforced ball balancer for clothes washing machine: patent 5,916,274 US, / Joon Yeop Lee, Do Weon Kim (Korea); (Samsung Electronics Co., Ltd.). No. -09/099,326. Filed Jun. 18, 1998. Appl. Patented Jun. 29, 1999.
21. Patent 2,984,094 US. Washing machine: patent 2,984,094 US, / J.F.Belaieff (Switzerland); (Frame S.A., Fribourg, Switzerland, a Swiss company). Serial No. -770,055. Filed Oct. 28, 1958. Patented May 16, 1961.
22. Patent 3,089,326 US. Washing machine: patent 3,089,326 US, / J.F.Belaieff (Switzerland); (Frame S.A., Fribourg, Switzerland, a corporation of Switzerland). Serial No. 111,674. Filed May 22, 1961. Patented May 14, 1963.
23. Patent 3,178,916 US. Machine for washing and centrifuging textile: patent 3,178,916 US, / J.F.Belaieff (Switzerland); (Frame S.A., Fribourg, Switzerland). Serial No. -206,646. Filed Feb. 25, 1963. Patented Apr, 20, 1965.
24. Patent 5,850,748 US. Front loading clothes washing machine with dynamic balancing mechanism: patent 5,850,748 US, / Cin Yong Kim, Do Weon Kim, Jin Soo Kim, Sam Yong Jang, Geum, Chan Lee (Korea); (Samsung Electronics Co., Ltd.). Appl. No. -774,876. Filed Dec. 27, 1996. Patented Dec. 22, 1998.
25. Patent 5,862,553 US. Dynamic balancing method for a washing machine: patent 5,862,553 US, / Ingo Haberl, Mario Trangoni (Electrolux Zanussi Electrodomestici S.p.A.). Appl. No. 841,111. Filed Apr. 29, 1997. Patented Jan. 26, 1999.
26. Patent 3,164,413 US. Wheel balancer: patent 3,164,413 US, / V.H. Salathiel (US); (Todd Engineering Co., Inc., Oklahoma). Serial No. -301,376. Filed Aug. 12, 1963. Patented Jan. 5, 1965.
27. Patent 3,316,021 US. Whell balancer: patent 3,316,021 US, / V.H.Salathiel (US). Serial No. -423,131. Filed Jan. 4, 1965. Patented Apr.25, 1967.

28. Patent 3,464,738 US. Dunamic whell balancing means: patent 3,464,738 US, / Comer c.Pierce. No. -712,249. Filed Mar. 11, 1968. Serial Patented Sept. 2, 1969.
29. Patent 3,724,904 US. Whell balancing device: patent 3,724,904 US, / C.R.Nixon, A.Gasafi (Canada); (C.R.Nixon Downsvie Ontario). Appl. No. -121,739. Filed Mar. 8, 1971. Patented Apr. 3, 1973.
30. Patent 3,109,321 US. Balancer for a rotating shaft: patent 3,109,321 US, / C.B.Rogers. Serial No. -139,235. Filed Sept. 19, 1961. Patented Nov. 5, 1963.
31. Patent 5,460,017 US. Weight compensating apparatus: patent 5,460,017 US, / Garry R. Taylor (Canada); (Eti Technologies Inc.). Appl. No. - 66,307. Filed May 21, 1993. Patented Oct. 24, 1995.
32. Patent 3,410,154 US. Automatic balancing device: patent 3,410,154 US, / A.Deakin. Serial No. -666,638. Filed Sept. 11, 1967. Patented Nov. 12, 1968.
33. Patent 3,799,619 US. Vibration dampening assembly: patent 3,799,619 US, / J.A.LaBarber (Kurt J. Wagner, Sherman Oaks). Appl. No. -254,706. Filed May 18, 1972. Patented Mar. 26, 1974.
34. Patent 3,433,534 US. Automatic balancer: patent 3,433,534 US, / G.E.Mercer (US). Serial No. -616,429. Filed Feb. 10, 1967. Patented Mar. 18, 1969.
35. Patent 3,282,127 US. Balance correcting unit for rotating shafts, ETC: patent 3,282,127 US, / Alfred Deakin. Serial No. -337,021. Filed Jan. 10, 1964. Patented Nov. 1, 1966.
36. Patent 4,674,356 US. Dunamic rotational counterbalance structure: patent 4,674,356 US, / Ronald B. Kilgore. Appl. No. -729,368. Filed May 1, 1985. Patented Jun. 23, 1987.
37. Patent 3,696,688 US. Automatic balancer for rotating masses: patent 3,696,688 US, / E.A.Goodrich, R.H.Jahson. Appl. No. -139,758. Filed May 3, 1971. Patented Oct. 10, 1972.
38. Patent 20010031616 A1 US. Portable power tool with an anti-vibration balancing device: patent 20010031616 A1 US, / Anders Urban Jansson, (Atlas Copco Tools AB). Appl. No. -09/ 801281. Filed March 7, 2001. Patented October 18, 2001.
39. Patent 2002/0056338 A1 US. Cost effective and reliable automatic balancer for high speed applications: patent 2002/0056338 A1 US, / Stefan Olausson, Anders Hagglund, Paul Wierzba. Appl. No. - 60/216,152. Filed Jul. 3, 2000. Patented May 16, 2002.
40. Patent 3854,347 US. Dunamic balancing device for a computer disc memory: patent 3854,347 US, / Joseph Hellerich. Appl. No. -388,450. Filed Aug. 15, 1973. Patented Dec. 17, 1974.

41. Patent 6,333,912 US. Self-compensating dynamic ball balancer for disk player: patent 6,333,912 US, / Jin-seung Sohn (Korea) (Samsung Electronics Co., Ltd.). Appl. No. 09/240,878. Filed Feb. 1, 1999. Patented Dec. 25, 2001.
42. Patent 6,477,133 US. Disk drive with unbalance correcting mechanism: patent 6,477,133 US, / Yasuhiro Yoshimura, Yoshishige Endo (Japan); Hitachi, Ltd. Appl. -No. -09/644,854. Filed Aug. 24, 2000. Patented Nov. 5, 2002.
43. Patent 2001/0008515 US. Automatic balancing mechanism for disk driver free from vibrations due to characteristic angular velocity: patent 2001/0008515 US, / Makoto Takeuchi, Kazuhiko Kitamura. Appl. No. - 09/793,165. Filed Feb. 26, 2001. Patented Jul. 19, 2001.
44. Patent 2001/0024069 US. Spindle motor having disc mounting portion: patent 2001/0024069 US, / Tadao Yamaguchi. Appl. No. -09/814,823. Filed Mar. 23, 2001. Patented Sep. 27, 2001.
45. Patent 6,373,154 B1 US. Disk player, and turntable incorporating self-compensating dynamic balancer and spindle motor incorporating self-compensating dynamic balancer adopted for disk player: patent 6,373,154 B1 US, / Jin-seung Sohn, Dae-sung Ro (Korea); (Samsung Electronics Co., Ltd.). Appl. No. -09/487,244. Filed Jan. 20, 2000. Patented Apr. 16, 2002.
46. Patent 2001/0038601 US. Automatic balancing apparatus: patent 2001/0038601 US, / Yoshimi Kikuchi, Daisuke Higuchi, Kian Hock (Japan). Appl. No. -09/764,964. Filed Jan. 17, 2001. Patented Nov. 8, 2001.
47. Patent 2002/0191530 US. Disk drive apparatus: patent 2002/0191530 US, / Kiyoshi Masaki, Kazuhiro Mihara (Japan); (Matsushita Electric Industrial Co., Ltd.). Appl. No. -10/179,433. Filed Jan. 24, 2002. Patented Dec. 19, 2002.
48. Patent 6,132,354 US. Automatic ball balancer for rotating machine: patent 6,132,354 US, / Shinki Ohtsu, Mitsuyuki Ishikawa, Masanori Yoshioka (Japan); (Hitachi Koki Co., Ltd.). Appl. No. -08/965,768. Filed Nov. 7, 1997. Patented Oct.17, 2000.
49. Patent 5,256,037 US. Self balancing motor: patent 5,256,037 US, / Michael R. Chatelain. Appl. No. -903,145. Filed Jun. 24, 1992. Patented Oct. 26, 1993.
50. Adolfsson Jesper A Study of Stability in AutoBalancing Systems using Multiple Correction Masses. Licentiate Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, January 1997. TRITA-MEK, Technical Report 1997:3, ISSN 0348-467X, 53 c.
51. Alexander J.D., "An Automatic Dynamic Balancer," Proceeding, 2nd Southeastern Conference, 1964, vol. 2, pp. 415-426.

52. Bövik P., Högfors C. Autobalancing of Rotors // *J. Sound and Vibr.* 1986. -3, № 3. -P. 429-440.
53. Cade J.W. Self-Compensating Balancing in Rotating Mechanisms // *Design News.* 1965. pp. 234-239.
54. Chung J., Ro D. S. Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanisms // *J. Sound Vibr.*, 1999, **228**(5), 1035–1056.
55. Chung J., Jang I. dynamic response and stability analysis of an automatic ball balancer for a flexible rotor // *J. Sound Vibr.*, 2003, **259**(1), 31–43.
56. Hwang C. H., Chung J. Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races // *Jap. Soc. Mech. Engrs Int. J.*, 1999, **42**, 265–272.
57. Inoue I., Araki Y., Miyara S. On the self-synchronization of mechanical vibrators // *Bulleting of the Japan Society of Mechanical Tnginttrs.* 1967. № 10. -C. 755-762.
58. Jinouchi Y., Araki Y., Inoue J., Ohtsuka Y., Tan C. Static Balancing and Transient Response of Multiball-type Automatic Balancer // *Asia-Pacific Vibration Conference, Session Rotordynamics, Kytakyushu, Nov. 1993*, pp. 493-498.
59. Kang, Jaan-Rong, Chao, Chang-Po, Huang, Chun-Lung, Sung, Cheng-Kuo The Dynamics of a Ball-Type Balancer System Equipped with a Pair of Free-Moving Balancing Masses. // *J. Vibr. Acoustics*, 2001, **123**, pp. 456–465
60. Lee J.K, Van Moorhem W. K. Analytical and Experimental Analysis of a Self-compensating Dynamic Balancer in a Rotating Mechanism // *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, sept. 1996, Vol. 118, pp. 468-475.
61. Park, J.S., et al. Automatic Balancing of Rigid Rotor Using Ball Balancer // *Proceedings of the KSME 1996, Annual Meeting A*, pp. 738-745.
62. Rajalingham C., Bhat R.B., Rakheja S. Automatic Balancing of Flexible Vertical Rotors Using a Guided Ball // *International Journal of Mechanical Sciences.* 1998. Vol. 40(9), pp. 825-834.
63. Shimizu S., Lee H. S., Basic study of Self-automatic Balancer for High Speed Spindles // *London: Institution of Mechanical Engineers*, 1992, preprint IMechE C432/050, pp. 569-574.
64. Аргюнин А.И. Исследование движения ротора с автобаланси́ром // *Известия Вузов. Машиностроение.* 1993. №1. - С. 15-19.
65. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. -М.: Наука, 1971. -896с.
66. Горбенко А.Н., Радченко О.П. Определение границ устойчивости процесса автобаланси́ровки ротора шарами путем численного решения уравнений движения // *Механика и машиностроение.* –2000. -№1. – С.123-127.

67. Горбенко А.Н. Влияние расположения шарикового автобалансира в конструкции однодискового ротора на шарнирной и податливой опорах на эффективность автобалансировки // Вестн. технол. ун-та Подолья. Ч. 1. Техн. науки. –2001. -№1. – С.43-47.
68. Горбенко А.Н. Об устойчивости балансировки ротора с помощью шариков // Проблемы прочности. –2003. -№3. – С.120-129.
69. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы атобалансира для динамической балансировки // Изв. АН СССР.ОТН. Мех. и Машиностр., 1956. № 4, -С.38-45.
70. Кравченко В.И. Автобалансирующие устройства для улучшения динамических характеристик машин: Автореф.дис... канд.техн.наук: 01.02.06 / АН СССР, ин-т машиностроения им. А.А.Благовраова. - М., 1989. -18 с.
71. Балансировочное устройство: А.с. 1023217 СССР, МКИ G 01M 1/32 / В.И.Кравченко, В.А.Ромашенко (СССР). - №2993604/25-28; Заявлено 10.10.80; Опубл. 15.06.83, Бюл. №22.
72. Автоматическое балансировочное устройство: А.с. 1048342 СССР, МКИ G 01M 1/02 / В.И.Коваленко, В.И.Кравченко (СССР). - №3374064/25-28; Заявл. 04.01.82; Опубл. 15.10.83, Бюл. №38.
73. Ротор дробилки: А.с. 1011250 СССР, МКИ<sup>3</sup> В 02 С 13/26 / В.И.Кравченко, Г.Г.Стедьмах, В.А.Ромашенко и И.И.Ситников (СССР); - №3323269/29-33, Заявлено 27.07.81; опубл. 15.04.83. бюл.№14.
74. Кравченко В.И. Подбор параметров шарового автоматического балансировочного устройства по номограммам // Вестник машиностроения. - 1982. - М. - С.58-60.
75. Кравченко В.И. Исследование устойчивости шарового автобалансира рядного типа // Машиностроение. 1983, -1. -С.25-27.
76. Кравченко В.И. Влияние неоднородного расположения шаров на динамические характеристики автобалансирующего устройства // Прикл. Мех., 1983. -19. -7. - С. 117-120.
77. Кравченко В.И. Автоматическая балансировка ротора пескомета шарами // Вестник машиностроения. - 1984. - №10. - С.33-34.
78. Кравченко В.И. Об устойчивости работы автобалансирующего устройства с рядным расположением шаров // Прогрессивная технология заготовительного и механосборочного производства. - Краматорск, 1985. - С. 137-143.
79. Кравченко В.И. Автоматическая балансировка ротора многомассовой системы шаровым автобалансиром рядного типа // Машиноведение. - 1986. - 2. - С.95-99.
80. Кравченко В.И., Ромашенко В.А. О равновесии шаров относительно ротора в шаровом автобалансирующем устройстве специальной

- конструкції // Технологія заготовительного і механосборочного виробництва. -Краматорськ, 1982. - С. 190-195.
81. Кравченко В.И., Ромашенко В.А. Автоматизация расчета параметров шарового балансировщика // Вестник машиностроения. 1983. - №7. - С.27-28.
  82. Кравченко В.И., Ромашенко В.А. Об автоматическом уравнивании шарами // Теория механизмов и машин. -Харьков, 1985. - Вып. 38. - С.69-74.
  83. Кравченко В.И., Макшанцев В.Г., Ромашенко В.А. Балансировка ротора пескомета // Машиностроитель. 1983. - №8. - С. 32-33.
  84. Кравченко В.И. и др. Стендовые испытания пескометных автобалансирующих устройств // Прогрессивная технология механосборочного производства. -Краматорськ, 1983. - С. 104-107.
  85. Кравченко В. К., Гусаров А. А. Об уравнивании роторов машин роликовым автобалансирующим устройством // Прогрессивные технологические процессы в тяжелом и транспортном машиностроении. -Краматорськ, 1987. - С. 133-139.
  86. Лац А.Я. Колебания и их устранения у роторов с вертикальной осью и плавающей подвеской: Автореф.дис... канд.тех.наук: 01.02.06 / Латв. гос. университет. -Рига, 1956. - 15 с.
  87. Мачабели Л.И. О движении диска с двумя маятниками // Изв. АН СССР. Механика, - 1965. - 2.
  88. Муйжнник А.И. Исследование устойчивости автоматического динамического балансировщика // Ученые записки Рижского политехнического института. 1959. -1. Вып. 1. - С. 155-170.
  89. Муйжнник А.И. Некоторые вопросы теории автоматической динамической балансировки // Вопросы динамики и прочности. Вып. -6. Рига: Изд-во АН ЛатССР, 1959. - С. 123-145.
  90. Невдаха Ю.А. Забезпечення працездатності нечутливих до сил ваги неklasичних автобалансирів: Автореф.дис... канд.тех.наук: 05.02.02 - Машинознавство/ НГУУ "КП", -Київ, 2003. -21 с.
  91. Автобалансирующий пристрій: Пат. 40770 А Україна, МКІ G 01M 1/38 / Г.Б.Філімоніхін, Ю.А.Невдаха (Україна); КДТУ. - № 99105754; Заявл. 21.10.99; Опубл. 16.08.2001, Бюл. №7.
  92. Філімоніхін Г.Б., Невдаха Ю.А. Зменшення чутливості автобалансирів до сил ваги шляхом накладання в'язей // Збірник наукових праць КДТУ. -2000. Вип. 6, С. 76-77.
  93. Автобалансирующий пристрій: Пат. 52430 А Україна, МКІ G 01M 1/38 / Г.Б.Філімоніхін, Ю.А.Невдаха (Україна); Г.Б.Філімоніхін, Ю.А.Невдаха. - № 2002053950; Заявл. 14.05.2002; Опубл. 16.12.2002, Бюл. №12.

94. Автобалансирующий пристрій (варіанти): Пат. 61701 А Україна, МКІ G 01M 1/38 / Г.Б.Філімоніхін, Ю.А.Невдаха (Україна); КДТУ. - № 2003032775; Заявл. 31.03.2003; Опубл. 17.11.2003, Бюл. №11.
95. Невдаха Ю.А. Стійкість основних рухів ротора, що швидко обертається і автобалансира з двома зв'язаними корегуючими вантажами // Збірник наукових праць КДТУ. -2002. Вип. №11, С. 128-134.
96. Невдаха Ю.А. Дослідження стійкості основного і побічних рухів неklasичного АБП при великих дисбалансах // Тези доповідей Першої Міжнародної н.-т. конференції “Машинобудування та металообробка - 2003”. – Кіровоград. – 2003. – С. 155.
97. Невдаха Ю.А. Конструкція і працездатність неklasичних автобалансирів, нечутливих до сил ваги // Тези доповідей 6-го Міжнародного симпозиуму Українських інженерів-механіків у Львові. – Львів. – 2003. – С. 50.
98. Филимоныхин Г.Б., Невдаха Ю.А. Модель ротора, совершающего плоскопараллельные движения, и двух связанных АТТ // Збірник наукових праць КДТУ. -2001. Вип. 8, С. 220-225.
99. Філімоніхін Г.Б., Невдаха Ю.А. Установившиеся движения ротора, уравновешиваемого связанными корректирующими грузами с неподвижными точками на оси вала ротора // Збірник “Вестник НТУУ “КПИ”, серія “Машиностроение”, 2000. Вип. №39, С.102-110.
100. Невдаха Ю.А., Филимоныхин Г.Б. Исследование на универсальном стенде динамики автобалансира с двумя связанными корректирующими грузами // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник “Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин”. -2001. Вип.№30, С. 89-94.
101. Філімоніхін Г.Б., Невдаха Ю.А. Дослідження стійкості усталених рухів ротора, що рухається плоскопаралельно і автобалансирів, у яких корегуючі вантажі обертаються навколо повздовжньої і поперечної осей ротора // машинознавство. –2002. №1, С. 41-45.
102. Филимоныхин Г.Б., Невдаха Ю.А. Уравновешивание ротора, совершающего плоскопараллельное движение, двумя связанными абсолютно твердыми телами с неподвижными точками на оси вала ротора // Прикладная механика. – 2002. - **38**, №3. - С. 135 - 144.
103. Нестеренко В.П. Теория и практика устройств автоматической балансировки роторов: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук: 05.02.18/ Новосибир. электротехн. ин-т.- Новосибирск, 1990. - 34 с.
104. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. -Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84 с.



105. Нестеренко В.П. Автоматическое устранение шарами статической неуравновешенности ротора двухмассовой системы // Известия Вузов. Машиностроение, 1983. -3. -С.46-50.
106. Нестеренко В.П. О возможности автоматической балансировки ротора гироскопа с помощью шаров // Механика гироскопических систем. -Киев: Изд-во при КВУ. 1983. -Вып. 2. - С. 67-71.
107. Нестеренко В.П. Автоматическое устранение статической неуравновешенности ротора с анизотропными опорами // Машиноведение. 1984. -1. - С. 24-25.
108. Нестеренко В.П. Определение параметров шара и беговой дорожки устройства автоматической балансировки ротора // Известия Вузов. Машиностроение. 1984. -5. - С. 37-41.
109. Нестеренко В.П. Автоматическое устранение шарами динамической неуравновешенности ротора // Известия Вузов. Машиностроение, 1987. -6. - С. 52-57.
110. Нестеренко В.П. Условия автоматической балансировки шарами двухроторной системы // Известия Вузов. Машиностроение. 1987. -7. - С. 63-67.
111. Нестеренко В.П. Учет вязкого сопротивления при определении условий балансировки // Известия Вузов. Машиностроение. 1989. -4. -4. - С. 39-41.
112. Нестеренко В.П., Соколов А.П. О применении шаров для автоматического устранения моментной неуравновешенности ротора // Вестник машиностроения. 1981. -5. - С. 50-51.
113. Нестеренко В.П., Соколов А.П. Влияние сил кулонова трения на величину остаточной моментной неуравновешенности // Динамика управляемых механических систем. – Иркутск: ИПИ, 1982. - С. 131-136.
114. Нестеренко В.П., Соколов А.П. Остаточный дисбаланс, вызванный эксцентриситетом беговой дорожки, при автоматической балансировке роторов шарами // Динамика управляемых механических систем. – Иркутск: ИПИ, 1983. - С. 46-50.
115. Нестеренко В.П., Соколов А.П. О способе повышения точности работы шарового автоматического балансировочного устройства // Вестник машиностроения. 1984. №8. – 8 с.
116. Нестеренко В.П., Катанухина С.Л. Условия автоматической балансировки консольного ротора // Управляемые механические системы. – Иркутск: ИПИ, 1986. - С. 68-69.
117. Нестеренко В.П., Симоненко Г.А., Катанухина С.Л. Переходные процессы в устройствах автоматической балансировки роторов // Инженерно-физический сборник. – Томск.: ТГУ, 1988. - С. 65-71.

118. А.С. 805087 СССР МКІ<sup>3</sup> G 01 M I/38 Устройство для балансировки роторов / В.П.Нестеренко, А.П.Соколов (СССР). - № 2735948/25-28; Заявлено 11.03.79; Опубл. 15.02.81. Бюл. №6 - 2 с.
119. А.С. 693136 СССР МКІ<sup>3</sup> G 01 M I/38 Автоматическое балансировочное устройство / В.П. Нестеренко, А.П. Соколов (СССР) - № 2599458/25-28; Заявлено 05.04.78; Опубл. 25.10.79. Бюл. № 39. - 2 с.
120. Нестеренко В.П., Гольдштейн Б.Г., Соколов А.П. Применение шаровых автобалансирующих устройств в ручных шлифовальных машинах // Строительные и дорожные машины. 1986. -№2. - С. 19-20.
121. Нестеренко В.П., Катанухина С.Л., Кладиев С.Н., Певнев Б.А., Фурманов А.М. Автобалансирующие устройства ручного механизированного инструмента // Механизация и автоматизация производства. 1988. №4. -С. 17-18.
122. Нестеренко В.П. Расчет параметров шарового автобалансирующего устройства ручной шлифовальной машины // Известия Вузов. Машиностроение. 1988. -7. - С. 40-44.
123. Нестеренко В.П., Автоматическая балансировка роторов с помощью жидкости // Управляемые механические системы. – Иркутск: ИПИ, 1980. - С. 193-197.
124. А.С. 1128129 СССР МКІ<sup>3</sup> G 01 M I/38 Устройство для автоматической балансировки роторов / В.П. Нестеренко, А.П. Соколов, В.М. Замятин, Д.В. Лычагин (СССР). - №3624283/25-28; Заявлено 19.07.83; Опубл. 07.12.84. Бюл. № 45. – 2 с.
125. Нестеренко В.П. Способ повышения эффективности жидкостного автоматического балансировочного устройства // Известия Вузов. Машиностроение. 1985. -№4. - С. 35-38.
126. Нестеренко В.П., Соколов А.П. Способ повышения эффективности жидкостного автоматического балансировочного устройства // Известия Вузов. Машиностроение. 1985. -№5. - С. 35-38.
127. Нестеренко В.П., Соколов А.П. Устранение влияния эксцентриситета обоймы на точность балансировки жидкостным автобалансиром // Управляемые механические системы. – Иркутск: ИПИ, 1985. - С. 41-44.
128. Сотніков В.С. Динаміка роторів з автобалансирами-демпферами для віброзахисту: Автореф. дис... канд.техн.наук: 05.02.09 - Динаміка та міцність машин/ НТУУ "КПІ", -Київ, 2002. -20 с.
129. Автобалансирувальний пристрій ротора: Пат. 55446 Україна, МКІ G01M1/38 G01M1/32 / Г.Б.Філімоніхін (Україна); КДТУ. - № 99105378; Заявл. 01.10.1999; Опубл. 15.04.2003, Бюл. №4.

130. Автобалансуючий пристрій: Пат. 40768 А Україна, МКІ G 01М 1/38 / Сотніков В.С., Г.Б.Філімоніхін (Україна); КДТУ. - № 99105704; Заявл. 21.10.99; Опубл. 16.08.2001, Бюл. №7.
131. Філімоніхін Г.Б., Сотніков В.С. Автобалансири-демпфери із сферичним рухом корегуючих мас // Збірник наукових праць КДТУ. -2000. Вип. 6, С. 73-75.
132. Автобалансир-демпфер: Пат. 52321 А Україна, МКІ G 01М 1/38 / Г.Б.Філімоніхін (Україна); Г.Б.Філімоніхін. - № 2002042788; Заявл. 08.04.2002; Опубл. 16.12.2002, Бюл. №12.
133. Сотніков В.С. Стійкість усталених рухів автобалансира-демпфера на великих швидкостях обертання ротора // Збірник наукових праць КДТУ. -2001. Вип. №10, С. 281-286.
134. Сотников В.С., Филимоныхин Г.Б. Исследование на универсальном стенде динамики автобалансира-демпфера // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник "Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин". -2001. Вип.№31, С. 6-11.
135. Філімоніхін Г.Б., Сотніков В.С. Модель ротора, що здійснює плоскопаралельний рух і зрівноважується корегуючим вантажем з нерухомою точкою на осі ротора // Наукові вісти НТУУ "КПІ", -2001. №4 (18), С. 122-126.
136. Филимоныхин Г.Б., Сотников В.С. Установившиеся движения ротора, совершающего плоскопараллельные движения, и автобалансира-демпфера // Збірник наукових праць КДТУ. -2000. Вип. 7, С. 192-199.
137. Філімоніхін Г.Б., Сотніков В.С. Дослідження стійкості усталених рухів ротора, що рухається плоскопаралельно і автобалансира-демпфера // Збірник "Вестник НТУУ "КПІ", серія "Машиностроение", 2001. Вип. №41, С. 146-151.
138. Філімоніхін Г.Б., Невдаха Ю.А., Сотніков В.С. Геометричні і масо-інерціальні характеристики корегуючих вантажів для неklasичних пасивних автобалансирів // Збірник наукових праць КДТУ. -2001. Вип. №10, С. 96-100.
139. Филимоныхин Г.Б. Динамика и устойчивость маятниковых автобалансиров со связями, наложенными на движения маятников: Автореф. дисс... канд.физ-мат.наук: 01.02.01 - Теоретическая механика / АН Украины, Ин-т механики. -Киев, 1991. -18 с.
140. Филимоныхин Г.Б. К устойчивости автобалансирующего устройства со связями, наложенными на движения корректирующих грузов // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1990. -№ 12. - С. 26-29.
141. Автобалансирующее устройство: А.с. 1795319 СССР, МКІ G 01М 1/38 / Г.Б. Филимоныхин (СССР). - № 4770688/28, Заявл. 09.11.89; Опубл. 15.02.93, Бюл. № 6.

142. Автобалансирующий пристрій: Пат. 21797 А Україна, МКІ G 01М 1/38 / Г.Б.Філімоніхін (Україна); КІСМ. - № 95031322; Заявл. 23.03.95; Опубл. 30.04.98, Бюл. №2.
143. Филимоныхин Г.Б. К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира // Докл.НАН Украины, Сер.А.-1996. № 8. - С. 74-78.
144. Филимоныхин Г.Б. Устойчивость основного движения маятниковых автобалансиров // Тез. докл. 8-й Международной конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем", Киев, 19-22.05.1997., т.1. Моделирование систем, С. 140
145. Філімоніхін Г.Б. Нестационарні побічні рухи двохкульового (двохмаятникового) автобалансира // Збірник наукових праць КДТУ, 2003. Вип.№13, С.347-352.
146. Филимоныхин Г.Б. Динамика многошаровых (многомаятниковых) автобалансиров. Устойчивость основных движений / Кировоград. гос. техн. ун-т. - Кировоград, 2003. - 46 с.: ил. - Библиогр.: 17 назв. - Укр. - Деп. в ГНТБ Украины 20.10.03 №144-Ук2003
147. Филимоныхин Г.Б. Динамика многошаровых (многомаятниковых) автобалансиров. Устойчивость побочных движений / Кировоград. гос. техн. ун-т. - Кировоград, 2003. - 23 с.: ил. - Библиогр.: 9 назв. - Укр. - Деп. в ГНТБ Украины 20.10.03, №153-Ук2003
148. Філімоніхін Г.Б. Усталені рухи багатоккульових (багатомаятникових) автобалансирів // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник "Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин". -2004. Вип.№34, С. 21-26.
149. Филимоныхин Г.Б. Универсальный стенд для исследования динамики пассивных автобалансиров и его апробация шаровым автобалансиром // Збірник наукових праць КДТУ, 2001. Вип. №9, С. 101-107.
150. Спосіб балансування роторів: Пат. 52429 А Україна, МКІ G 01М 1/32 / Г.Б.Філімоніхін (Україна); Г.Б.Філімоніхін. - № 2002053949; Заявл. 14.05.2002; Опубл. 16.12.2002, Бюл. №12.
151. Філімоніхін Г.Б., Черниш С.Г. Конструкція кульових автобалансирів для зрівноваження вертикально розташованих обертових тіл // Тези доповідей Першої Міжнародної н.-т. конференції "Машинобудування та металообробка – 2003" 17-19 квітня 2003 р., Кировоград, С. 235-236.
152. Філімоніхін Г.Б., Черниш С.М. Конструкція кульових автобалансирів для зрівноваження вертикально розташованих обертових тіл // Збірник наукових праць КДТУ. -2003. Вип. 13, С. 334-341.
153. Филимоныхин Г.Б. Автобалансиры со связанными маятниками, насаженными на оси, перпендикулярные валу // Материалы I-го

- Всеукраинского съезда по теории механизмов и машин, Харьков, 18-20.06.1997. – С.66.
154. Филимоныхин Г.Б. О динамике уравнивания ротора связанными маятниками, насаженными на оси, перпендикулярные валу // Тез. докл. 8-й Международной конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем", Киев, 19-22.05.1997., т.2. Механические системы, – С. 135.
155. Филимоныхин Г.Б. Плоская модель ротора, уравниваемого двумя парами связанных маятников, насаженных на оси, перпендикулярные валу // Збірник наукових праць КДТУ, 1999. Вип.№5, С. 52-55.
156. Філімоніхін Г.Б. Ефективність зрівноваження ротора з нерухою точкою двома зв'язаними маятниками, насадженими на вісь, перпендикулярну валу // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник "Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин", 1999. Вип.№28, С. 107-115.
157. Філімоніхін Г.Б. Про зрівноваження ротора маятниками, насадженими на осі, що перпендикулярні валу // Доп. НАН України. -2000. -№ 6. - С. 66-70.
158. Филимоныхин Г.Б. Уравнивание ротора корректирующим грузом с неподвижной точкой на оси вала // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник "Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин", 2000. Вип.№29, С. 103-108.
159. Филимоныхин Г.Б. Условия уравнивания ротора абсолютно твердым телом с неподвижной точкой на оси вала // Доп. НАН України. -2001. -№ 1. С. 65-69.
160. Автобалансирующий пристрій: Пат. 36244 А Україна, МКІ G 01M 1/38 / Г.Б.Філімоніхін (Україна); Г.Б.Філімоніхін. - № 99116365; Заявл. 23.11.99; Опубл. 16.04.2001, Бюл. №3.
161. Автобалансирующий пристрій: Пат. 36294 А Україна, МКІ G 01M 1/38 / Г.Б.Філімоніхін (Україна); Г.Б.Філімоніхін. - № 99116468; Заявл. 30.11.99; Опубл. 16.04.2001, Бюл. №3.
162. Філімоніхін Г.Б. Модель ротора, що здійснює плоскопаралельний рух і зрівноважується корегуючим вантажем, який обертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора // Машинознавство. 2001. - №6. - С. 18-21.
163. Горошко О.А., Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження ротора, що здійснює плоскопаралельний рух, абсолютно твердим тілом, яке обертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора // Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. Вип. №1, 2001. С. 112-119.

164. Філімоніхін Г.Б. Стендове випробування автобалансира, в якому коригувальний вантаж обертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора // Збірник наукових праць КДТУ, 2003. Вип. №12, С. 237-238.
165. Філімоніхін Г.Б. Стендове випробування автобалансира, в якому коригувальний вантаж обертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора // Тези доповідей Першої Міжнародної н.-т. конференції “Машинобудування та металообробка – 2003” 17-19 квітня 2003 р., Кіровоград, С. 52-55.
166. Філімоніхін Г.Б. Нестационарні рухи ротора з автобалансиром, в якому коригувальний вантаж обертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник “Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин”, 2003. Вип. №33, С. 363-368.
167. Філімоніхін Г.Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла // Вісник, математика-механіка. Київський національний університет. Вип. №7-8, 2002. С. 67-71.
168. Філімоніхін Г.Б. Дослідження динаміки пасивних автобалансирів з твердими коригувальними вантажами // Тез. доп. 6-го Міжнародного симпозіуму Українських інженерів-механіків у Львові, Львів, 21-23.05.2003., С. 27-28.
169. Автобалансируючий пристрій: Пат. 53169 А Україна, МКІ G01M1/30 / Г.Б.Філімоніхін, В.С.Майоров (Україна); Г.Б.Філімоніхін, В.С.Майоров. - № 2002032408; Заявл. 27.03.02; Опубл. 15.01.2003, Бюл. №1.
170. Автобалансируючий пристрій: Пат. 58675 А Україна, МКІ G01M1/38 / Г.Б.Філімоніхін, В.С.Майоров (Україна); КДТУ. - № 2002043575; Заявл. 29.04.02; Опубл. 15.08.2003, Бюл. №8.
171. Філімоніхін Г.Б., Майоров В.С. Конструкція некласичних автобалансирів для зрівноваження горизонтально розташованих роторів // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник “Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин”, 2002. Вип. №32, С. 107-115.
172. Філімоніхін Г.Б., В.С.Майоров Методика експериментального визначення балансувальної ємності пасивних автобалансирів та її апробація на автоматичній пральній машині // Тези доповідей Першої Міжнародної н.-т. конференції “Машинобудування та металообробка – 2003” 17-19 квітня 2003 р., Кіровоград, С. 233-234.
173. Філімоніхін Г.Б., Майоров В.С. Методика експериментального визначення балансувальної ємності пасивних автобалансирів та її апробація на автоматичній пральній машині // Збірник наукових праць КДТУ. -2003. Вип. 13, С. 324-330.

174. Emanuelsson S. Introducing Automatic Balancing as a Means to Reduce Imbalance Induced Vibrations in Electrical and Air-Powered Hand-Held Angle Grinders (Power Tools) // Proceeding, 49th International Appliance Technique Conference, 1998, pp. 282-293.
175. Miwa T, Suzuki K, Kawaguchi T, Kawakami Y, Ohtsu S, Date O Reduction of grinder vibration by balancing // *Industrial Health*, 1984, 22, pp. 59-74.
176. Rajalingham C., Rakheja S. Whirl suppression in handheld power tool rotors using guided rolling balancers // *J. Sound Vibr.*, 1998, **217**(3), pp.453–466.
177. Агафонов Ю.В. Исследование устойчивости шарикового автобалансира роторной системы на упругих опорах // *Машиноведение*. 1976. -№6, - С. 3-7.
178. Агафонов Ю.В. Автоматическое балансирующее устройство для ручных шлифовальных машин // *Вестник машиностроения*. 1976. - № 9. - С. 36-38.
179. Агафонов Ю.В., Гольдштейн Б.Г. Автоматическое балансирующее устройство для ручных шлифовальных машин // *Строительные и дорожные машины*. 1976. -№3. - С. 15-17.
180. Кладиев С.Н. Автобалансирующие устройства ручных шлифовальных машин: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук: 01.02.06. -Томск, 1996. - 21 с.
181. Пашкова Л.А. Влияние автобалансирующих устройств на износ шлифовальных кругов и качество обрабатываемой поверхности: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.техн. наук: 01.02.06. -Томск, 1999. - 24 с.
182. Горбунов Б.И., Гусев В.Г. Уравновешивающие устройства шлифовальных станков. -М.: Машиностроение 1976. - 167 с
183. Горбунов Б.И., Гусев В.Г., Прохоров А.Ф. И др. Балансировка шлифовальных кругов на холостом ходу // *Уравновешивание роторов и механизмов* -М., 1978. С. 97-101.
184. Рейбах Ю.С. Устройства для балансировки шлифовальных кругов. М.: НИИМАШ, 1967. – 84 с.
185. Рейбах Ю.С., Ривкин А.И. Балансировка шлифовального круга шарами на выбеге ротора // *Станки и инструменты*. 1960. -7. - С.13-16.
186. Рейбах Ю.С., Ривкин А.И. Основы автоматической балансировки шлифовального круга шарами // *Станки и инструмент*. 1960. - № 5. - С. 27-30.
187. Kim W.D., Kwon H.O., Jeon M.S. Dynamic Analysis and Design of the Ball Balancer of a DVD System Considering Frictional Contact // *LG Electronics Inc., Home Appliance Laboratory*, 1999, 11 p.

188. Kim W., Chung J. Performance of automatic ball balancers on optical disc drives // Proc Instn Mech Engrs Part C: J Mechanical Engineering Science, 2002, Vol. 216, pp. 1071-1080.
189. Чоловський Р.Г. Вібрації та автоматичне балансування машин з вертикальною віссю обертання і змінним дисбалансом ротора : Автореф. дис... канд. техн. наук 05.02.02 – Машинознавство / Технологічний ун-т Поділля. - Хмельницький, 1999. - 19с.
190. Ройзман В. П., Малигін О. В., Чоловський Р. Г. Дослідження роботи АБП на роторі з горизонтальною віссю обертання // Вісник Технологічного університету Поділля. - Част. 2. - Спец. Випуск. - №4. - 1998. - С. 143-145.
191. Ройзман В. П., Малигін О. В., Чоловський Р. Г. Математична модель рідинного автобалансиуючого пристрою // Вісник Технологічного університету Поділля. Сер. 3. Соціально-гуманітарні і природничі науки. - 1997. - №1. - С. 59-63.
192. Ройзман В.П., Борко І.В., Малыгин А.В., Чоловский Р.Г. Математическая модель работы жидкостного автобалансира // Сб. тр. 2-й междунар. конф. "Динамика роторных систем". - Каменец-Подольский, 1998. - С. 86-90.
193. Ройзман В.П., Борко І.В., Малигін О.В., Чоловський Р.Г. Експериментальні дослідження роботи автобалансира // Сб. тр. 2-й междунар. конф. "Динамика роторных систем". - Каменец-Подольский, 1998. - С. 91-95.
194. Чоловський Р.Г. Математична модель ротора з кульковим автобалансиуючим пристроєм // Вісник Технологічного університету Поділля. - 1998. -№1. - С. 69-72.
195. Чоловський Р. Г., Нікітін О. О. Методика швидкісної відеозйомки роботи автобалансиуючого пристрою // Вісник Технологічного університету Поділля. Сер. 3. Соціально-гуманітарні і природничі науки. - 1997. - №1. - С. 56-58.
196. Чоловський Р. Г., Нікітін О.О. Установка для дослідження процесу автобалансиування прально-віджимних машин // Вісник Технологічного університету Поділля. - Част. 2. - Спец. Випуск. - №4. - 1998. - С. 151-152.
197. Balancer for an automatic washer: patent US 5,345,792 E.K.Farrington, V.M.Sharp, V.M.Vacurpa, A.Mason (Whirlpool Corporation). Filed Dec. 28, 1992. Appl. No. 997,435. Patented Sep. 13, 1994.
198. Kim Hyun Min A Study on the Dynamic Characteristics of the Suspension of Washing Machine // The Second DADS Korean User's Conference '95, 1995, pp. 49-60.



199. Seichchirou Suzuk A Study on the Dynamic Behavior of an Automatic Washing Machine // 2001 Korea ADAMS User Conference, 2001. 11. 8~9, P.1-6.
200. Tatsumi Hisao Liquid Balancer Newly Developed for Fully Automatic Washer // Toshiba Review, 1985, Vol. 40, No 9, pp. 755-758.
201. Иванов А.Г. Снижение вибраций в подвижных конструкциях с автобалансирующим устройством и корректирующей массой-жидкостью: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук: 05.02.02. -Казань, 1998. -20 с.
202. Адаменко А.Я., Токарь И.Г., Матвеев В.В. Вибронапряженность попарно-бандажных лопаток с встроенным демпфером // -К.: ИПП АН УССР. - Препр., 1990. -29 с.
203. Бабенко А.Є., та інш. Визначення власних частот і власних форм коливань дискових пол // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 1998, №3, С. 230-242.
204. Боронко О.А. Решение задачи изгибных колебаний пластинок с учетом несовершенной упругости материала при кинематическом возбуждении // Вестник НТУУ "КПИ" Машиностроение, выпуск 34, 1998, С. 6-10.
205. Бобир М.І. Легеза В.П. Чисельний аналіз динаміки циклоїдального гасителя вимушених коливань із сухим тертям / Наукові Вісті НТУУ "КПИ", - №4. - 2002. - С. 39-45.
206. Глонь О.А. Приближенное вычисление частот собственных колебаний роторов подвесных центрифуг // Вопросы оптимизации в динамических системах с непрерывно-дискретными параметрами. - Киев: Наукова думка, 1980. -С. 149-153.
207. Горошко О.А., Круковский О.И., Пятецкий В.А. Исследование крутильных колебаний торцевой фрезы со свободно вращающимся ротором // Технология и орг. пр-ва. 1985. №2. -С.29-31
208. Горошко О.А., Круковский О.И.,Пучко Н.П.,Пятецкий В.А. Исследование устойчивости торцевой фрезы с динамическим демпфером // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. 1988. - Вып. 30. -С. 17-21.
209. Горошко О.О. Гіроскопічні системи: Навчальний посібник. - К.: ВПЦ "Київський університет", 1994. - 116 с.
210. Гробов В.А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин. -М.: Изд-во ФН СССР, 1961. -166 с.
211. Зиньковский А.П. Численное исследование взаимосвязанных колебаний расстроенного рабочего колеса компрессора турбомашин // Проблемы прочности. - 1997. - № 2.

212. Зиньковский А.П. Влияние параметров упругодиссипативной связи на резонансные колебания систем с нарушенной поворотной симметрией // Проблемы прочности. - 1999. - № 1.
213. Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. -М.: Изд. АН СССР, 1963. -482 с.
214. Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В. И. Динамика роторов в упругих опорах. -М.: Наука. Гл. ред. Физ. -матем. лит., 1982. -280 с.
215. Крылов А.Н. Об определении критических скоростей вращающегося вала. -Л.: Изд-во АН СССР, 1982. -376 с.
216. Кушуль М.Я. Автоколебания роторов. -М.: Изд-во АН СССР, 1963. - 168 с.
217. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. -К.: Наук. думка, 1985. -263 с.
218. Павловский М.А., Збруцкий А.В. Динамика роторных вибрационных гироскопов. - К.: Вища школа, 1984. - 191 с.
219. Павловский М.А., Петренко В.Е. Виброустойчивость гироскопов. -К.: Вища школа, Изд-во при КВУ, 1982. -171 с.
220. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. -М.: Машиностроение, 1967. -316 с.
221. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. -Л.: Энергия, 1971. - 388 с.
222. Хильчевский В.В. Колебания демпфированных композитных конструкций. -К.: Вища школа, 1995, - 180 с.
223. Артемьев Н.А. Метод определения характеристических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики // Изв. АН СССР. Матем., 1944, 3, -№2. - С. 84-97.
224. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости движения. -М.: Наука, 1967. - 223 с.
225. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. -М.: Наука, 1984. - 176 с.
226. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. -М.: Наука, 1967. - 472 с.
227. Емельянова И.С., Фуфаев Н.А. Об устойчивости стационарных движений. В сб.: Теория колебаний, прикл. мат. и кибернет. - Горький, 1974. - С. 3-9.
228. Зубов В.И. Устойчивость движения. -М. : Высшая школа, 1973. -272 с.
229. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // собр. соч.: в 6-ти т. -М. -Л.: Изд-во АН СССР, 1956. - 2. - С. 7-264.
230. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения, изд. 2-е. -М.: Наука, 1966. - 530 с.

231. Неймарк Ю.И. Структура  $D$  - разбиение пространства полиномов и диаграммы Вышнеградского и Найквиста // Доклады АН СССР. 1948, 59, -5. - С. 853-856.
232. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Об устойчивости стационарных движений голономных систем // Прикл. матем. и мех., 1966, -30. -2. - С. 236-242.
233. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений // Прикл. мат. и мех., 1966, -30, -5. - С. 922-933.
234. Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. -К.: Наук. думка, 1977. -160 с.
235. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. -М.: Наука, 1990. - 176 с.
236. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. -М.: Наука, 1981. -568 с.
237. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. -М.: Наука, 1975. - 384 с.
238. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. -М.: Наука, 1974. - 503 с.
239. Василенко Н.В. Теория колебаний :Учеб. пособие для студ. техн. вузов.- Киев: Высш. шк., 1992.- 429 с.
240. Ден-Гартог Дж.П. Механические колебания: Перев. с англ. -М.: Физматгиз, 1960. - 580 с.
241. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. -М.: Гостехиздат, 1956. - 491 с.
242. Митропольский Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. -Киев: Изд-во АН УССР, 1955. -283 с.
243. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики, т. II. М.: "Наука", 1977, - 544 с.
244. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. - К.: Техніка, 2002. - 512 с.
245. Найфэ А. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. -М.: Мир, 1984. - 535 с.

Г.Б.Філімоніхін

# Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами

Монографія  
за спеціальністю 05.02.09 – динаміка та міцність машин

Комп'ютерна верстка - КНТУ, каф. ДМ та ПМ,  
тел. (0522) 597-547

За інформацією з питань друку та придбання монографії просимо звертатися за адресою: 25006, м.Кіровоград, пр. Університетський, 8, КНТУ, кафедра деталей машин та прикладної механіки, т. (0522) 597-547.

Підп. до друку 21.05.2004. Формат 60x84 1/16 (A5). Папір друк №3.  
Ум. друк. арк. 22,0 Ум. фарбо-відб. 22,06 Облік.-вид. арк. 22,12. Тираж 310 прим.  
Зам. № 229

---

Кіровоградський Національний технічний університет  
25006, м. Кіровоград, пр. Університетський, 8, тел. (0522) 597-426

---

ТОВ "КОД"  
25009, м. Кіровоград, вул. 50 років Жовтня, 7а, тел. (0522) 234-427