

УДК 531.36:534.1:62.755

© 2002

Г. Б. Филимонихин, Ю. А. Невдаха

### УРАВНОВЕШИВАНИЕ РОТОРА ДВУМЯ СВЯЗАННЫМИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

Исследования устойчивости движения связки абсолютно твердых тел (АТТ) являются актуальными задачами механики. В рамках этих задач исследуются явления, которые наблюдаются в различных областях естествознания и техники. Об актуальности этих задач и математических методах, применяемых при их решении, свидетельствуют работы [1-4, 6-9]. Настоящая работа посвящена исследованию движений новой механической системы, состоящей из ротора и двух связанных АТТ, имеющих неподвижные точки на продольной оси ротора. При этом устанавливаются условия, при выполнении которых АТТ будут уравновешивать статический дисбаланс ротора.

1. В [3,4] установлено, что абсолютно твердое тело (АТТ) с неподвижной точкой на оси вала ротора проявляет автобалансирующее свойство при выполнении следующих условий относительно главных осей  $x_1, x_2, x_3$ , выходящих из точки подвеса АТТ:

$$I_1 = A, \quad I_2 = I_3 = B, \quad \mathbf{l}_G = (0, 0, -l)^T. \quad (1)$$

Здесь:  $I_1, I_2, I_3$  - осевые моменты инерции АТТ;  $\mathbf{l}_G$  - радиус-вектор центра масс АТТ относительно точки подвеса;  $t$  - знак транспонирования. Идеальному уравновешиванию ротора препятствуют силы тяжести. Поэтому в [5] предложено устанавливать на оси вала ротора два идентичных АТТ и связывать их так, чтобы они поворачивались вокруг вторых осей вращения на равные углы в противоположные стороны (рис. 1). Ниже исследуются динамика и устойчивость движений ротора, совершающего плоскопараллельное движение и уравновешиваемого двумя связанными АТТ.

Предполагается, что АТТ имеют относительно ротора две степени свободы: могут поворачиваться вместе на угол  $\psi$  вокруг оси вала ротора и на равные углы  $\varphi$  в противо-

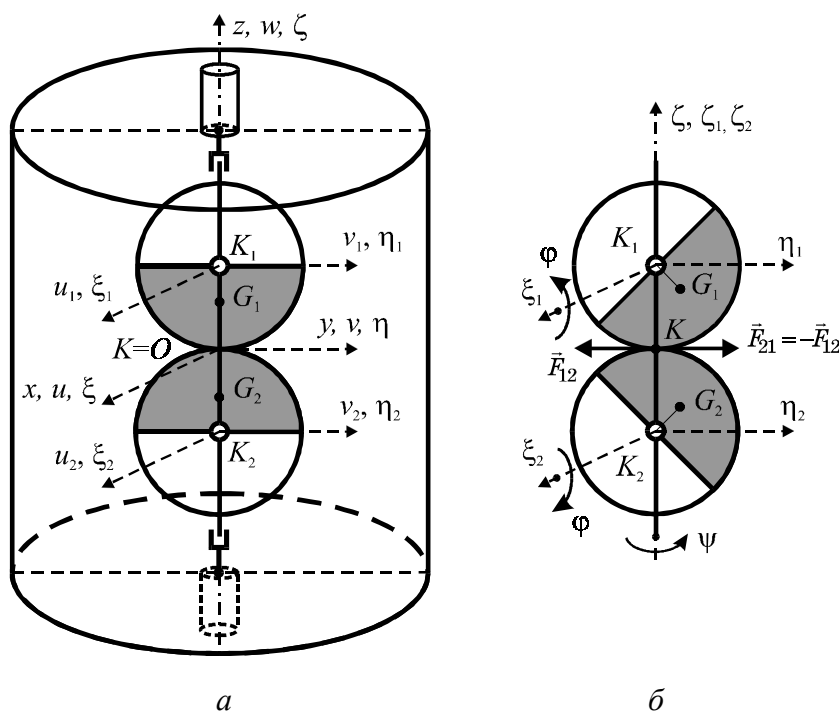


Рис. 1

ложные стороны вокруг осей, проходящих через их точки подвеса и перпендикулярных оси вала. При поворотах АТТ вокруг осей вращения возникают моменты сопротивления  $-H_1\dot{\varphi}$ ,  $-2H_2\dot{\psi}$ , где  $H_1$ ,  $H_2$  - коэффициенты вязкого трения. Ротор расположен вертикально и его удерживают изотропные вязкоупругие опоры. Для описания движения ротора используем оси  $Oxyz$ , которые вращаются вместе с ротором с постоянной скоростью  $\omega$ , причем ось  $z$  совпадает с осью вращения и точка  $O$  находится на уровне общего центра масс АТТ. Вспомогательные оси  $Kuvw$  жестко связаны с ротором и параллельны осям  $Oxyz$ , причем ось  $w$  совпадает с осью вала ротора и при отсутствии отклонения вала от оси вращения точки  $K$  и  $O$  совпадают. Относительно этих осей центр масс ротора имеет координаты  $(e \cos \gamma, e \sin \gamma, 0)$ , где:  $e$  - эксцентриситет;  $\gamma$  - угол, определяющий направление вектора дисбаланса. В процессе движения вал отклоняется от оси вращения на  $\mathbf{r}_K = \mathbf{OK}$  и на него начинают действовать восстанавливающая сила  $-c\mathbf{r}_K$  и сила вязкого сопротивления  $-H_3\mathbf{v}_K$ , где  $c$  - жесткость,  $H_3$  - коэффициент вязкого сопротивления опор,  $\mathbf{v}_K = d\mathbf{r}_K/dt$  - абсолютная скорость оси вала ротора (точки  $K$ ). Для описания движения АТТ используем вспомогательные оси  $K_i u_i v_i w_i$ , которые выходят из точки подвеса  $i$ -го АТТ и параллельны осям  $Kuvw$ , и оси  $K_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ , которые выходят из точки подвеса  $i$ -го АТТ и получаются из осей  $K_i u_i v_i w_i$  после поворота на угол  $\psi$  вокруг оси  $w_i$ . На рис. 1, а показан ротор и АТТ в исходном положении - при отсутствии отклонения вала от оси вращения и при отсутствии поворотов АТТ. На рис. 1, б показаны АТТ в процессе движения.

Для составления уравнений динамики АТТ используем теорему об изменении момента количества движения материальной системы. За подвижные оси принимаем  $K_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ . Тогда теорема примет вид [2]:

$$\frac{d\mathbf{L}_{K_i}}{dt} + \tilde{\mathbf{u}}_{\xi_i \eta_i \zeta_i} \times \mathbf{L}_{K_i} + \mathbf{l}_{G_i} \times m \mathbf{a}_{K_i} = \mathbf{M}_{K_i}^{(e)}, \quad \mathbf{L}_{K_i} = \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{I}}, \quad /i = 1, 2/. \quad (2)$$

Здесь:  $\mathbf{L}_{K_i}$  - момент количества движения  $i$ -го АТТ относительно точки подвеса,  $d\mathbf{L}_{K_i}/dt$  - его производная в подвижной системе координат  $K_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ ;  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  - абсолютная скорость вращения  $i$ -го АТТ;  $\tilde{\mathbf{u}}_{\xi_i \eta_i \zeta_i}$  - угловая скорость вращения подвижных осей  $K_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ ;  $\mathbf{M}_{K_i}^{(e)}$  - главный момент внешних сил, действующих на  $i$ -е АТТ, найденный относительно точки  $K_i$ ;  $\mathbf{l}_{G_i}$  - радиус-вектор центра масс  $i$ -го АТТ относительно точки  $K_i$ ;  $\mathbf{a}_{K_i}$  - абсолютное ускорение точки подвеса  $i$ -го АТТ;  $m$  - масса  $i$ -го АТТ,  $\tilde{\mathbf{I}}$  - его тензор инерции относительно точки  $K_i$ . Уравнения динамики АТТ получаются: подстановкой в уравнение (2) векторных величин, найденных в проекциях на оси  $K_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ ; проектированием полученных уравнений на оси  $\xi_i, \zeta_i$ ; исключением из полученных уравнений сил взаимодействия между АТТ. Определение проекций векторов на оси  $K_i \xi_i \eta_i \zeta_i$  упрощает матрица направляющих косинусов между осями  $Kxyz$  и  $K\xi\eta\zeta$ :

$$\begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для получения уравнений динамики ротора относительно подвижных осей  $Oxyz$  используем теорему о движении центра масс материальной системы в виде

$$M_{\Sigma} \left[ \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} + \tilde{\mathbf{a}}_{xyz} \times \mathbf{r}_C + \tilde{\mathbf{u}}_{xyz} \times (\tilde{\mathbf{u}}_{xyz} \times \mathbf{r}_C) + 2\tilde{\mathbf{u}}_{xyz} \times \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \right] = \mathbf{R}^{(e)}. \quad (3)$$

Здесь:  $M_{\Sigma} = M + 2m$  - масса системы;  $\mathbf{r}_C$  - радиус-вектор центра масс системы,  $d'\mathbf{r}_C/dt$ ,  $d'^2\mathbf{r}_C/dt^2$  - его первая и вторая производные относительно осей  $Oxyz$ ;  $\dot{\mathbf{u}}_{xyz}$ ,  $\dot{\mathbf{a}}_{xyz}$  - угловые скорость и ускорение вращения осей  $Oxyz$ ;  $\mathbf{R}^{(e)}$  - главный вектор внешних сил, действующих на систему. Уравнения динамики ротора получаются путем подстановки в уравнение (3) векторных величин, найденных в проекциях на оси  $Oxyz$ , и проектированием полученных уравнений на оси  $x, y$ .

Уравнения динамики системы имеют вид

$$\begin{aligned}
A\ddot{\phi} + H_1\dot{\phi} - ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x)\sin\psi - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y)\cos\psi]\cos\phi &= 0, \\
B\ddot{\psi} + H_2\dot{\psi} - ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x)\cos\psi + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y)\sin\psi]\sin\phi &= 0, \\
M_{\Sigma}(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x) + H_3(\dot{x} - \omega y) + cx - 2ml[\dot{\phi}\sin\psi + 2\dot{\phi}(\omega + \dot{\psi})\cos\psi]\cos\phi + \\
+ [\ddot{\psi}\cos\psi - (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\omega\dot{\psi})\sin\psi]\sin\phi - \left(\sin\phi\sin\psi - \frac{Me}{2ml}\cos\gamma\right)\omega^2 &= 0, \\
M_{\Sigma}(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y) + H_3(\dot{y} + \omega x) + cy + 2ml[\dot{\phi}\cos\psi - 2\dot{\phi}(\omega + \dot{\psi})\sin\psi]\cos\phi - \\
- [\ddot{\psi}\sin\psi + (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\omega\dot{\psi})\cos\psi]\sin\phi - \left(\sin\phi\cos\psi + \frac{Me}{2ml}\sin\gamma\right)\omega^2 &= 0, \tag{4}
\end{aligned}$$

Таким образом, динамика системы зависит от двенадцати параметров

$$A, B, l, m, H_1, H_2, M, e, \gamma, c, H_3, \omega.$$

2. Приводим уравнения динамики к безразмерному виду. Вводим параметры:

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_{\Sigma}}, \quad \rho_1 = \sqrt{A/m}, \quad \rho_2 = \sqrt{B/m}, \tag{5}$$

где:  $\omega_0$  - резонансная частота – частота собственных колебаний ротора при неподвижном относительно ротора АТТ, отсутствии вращения ротора и не учете сил сопротивления;  $\rho_{1/2}$  - осевые радиусы инерции АТТ. Вводим безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{xl}{\rho_1^2}, \quad \eta = \frac{yl}{\rho_1^2}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}\right). \tag{6}$$

Вводим безразмерные параметры:

$$\begin{aligned}
R_m = \frac{2ml^2}{M_{\Sigma}\rho_1^2}, \quad R_{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad R_{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad h_{1,2} = \frac{H_{1,2}}{m\rho_{1,2}^2\omega_0}, \\
H = \frac{H_3}{M_{\Sigma}\omega_0}, \quad u_0 = \frac{Me}{2ml}\cos\gamma, \quad v_0 = \frac{Me}{2ml}\sin\gamma. \tag{7}
\end{aligned}$$

После преобразований уравнения динамики (4) примут следующий безразмерный вид:

$$\ddot{\phi} + h_1\dot{\phi} - [(\ddot{\xi} - 2R_{\omega}\dot{\eta} - R_{\omega}^2\xi)\sin\psi - (\ddot{\eta} + 2R_{\omega}\dot{\xi} - R_{\omega}^2\eta)\cos\psi]\cos\phi = 0,$$

$$(\ddot{\psi} + h_2\dot{\psi})R_{\rho}^2 - [(\ddot{\xi} - 2R_{\omega}\dot{\eta} - R_{\omega}^2\xi)\cos\psi + (\ddot{\eta} + 2R_{\omega}\dot{\xi} - R_{\omega}^2\eta)\sin\psi]\sin\phi = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\xi} - 2R_{\omega} \dot{\eta} - R_{\omega}^2 \xi + H(\dot{\xi} - R_{\omega} \eta) + \xi - R_m \left[ \ddot{\varphi} \sin \psi + 2(R_{\omega} + \dot{\psi}) \dot{\varphi} \cos \psi \right] \cos \varphi + \\
& + \left[ \ddot{\psi} \cos \psi - (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_{\omega} \dot{\psi}) \sin \psi \right] \sin \varphi + R_{\omega}^2 (u_0 - \sin \varphi \sin \psi) = 0, \\
& \dot{\eta} + 2R_{\omega} \dot{\xi} - R_{\omega}^2 \eta + H(\dot{\eta} + R_{\omega} \xi) + \eta - R_m \left[ \ddot{\psi} \sin \psi + (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_{\omega} \dot{\psi}) \cos \psi \right] \sin \varphi - \\
& - \left[ \ddot{\varphi} \cos \psi - 2(R_{\omega} + \dot{\psi}) \dot{\varphi} \sin \psi \right] \cos \varphi + R_{\omega}^2 (v_0 + \sin \varphi \cos \psi) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь точка над переменной означает уже производную по  $\tau$ , а не по  $t$ . Таким образом, динамику системы определяют восемь безразмерных параметров, определённых в (7).

**3.** Исследуем установившиеся движения системы. Уравнения установившихся движений имеют вид

$$\begin{aligned}
s_1 &= (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) R_{\omega}^2 \cos \tilde{\varphi} = 0, \quad s_2 = (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) R_{\omega}^2 \sin \tilde{\varphi} = 0, \\
s_3 &= (R_{\omega}^2 - 1) \tilde{\xi} + H R_{\omega} \tilde{\eta} + R_m R_{\omega}^2 (u_0 - \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi}), \\
s_4 &= -H R_{\omega} \tilde{\xi} + (R_{\omega}^2 - 1) \tilde{\eta} + R_m R_{\omega}^2 (v_0 + \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi}),
\end{aligned} \tag{9}$$

где  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$  - установившиеся значения переменных, определяющих положение системы. Из (9) видно, что установившиеся движения делятся на три группы.

В первой группе устранено отклонение вала от оси вращения  $\tilde{\xi} = \tilde{\eta} = 0$ . Два существенно различных движения этой группы

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0, \quad \tilde{\varphi}_2 = \pi - \varphi_0, \quad \varphi_0 = \arcsin(Me/2ml), \tag{10}$$

причем АТТ отклонены в легкую сторону ротора настолько, что уравнивают дисбаланс. Поэтому это два основных установившихся движения системы. Положения АТТ в этих движениях изображены на рис. 2, а, б.

В установившихся движениях второй группы

$$\tilde{\varphi}_3 = -\pi/2, \quad \tilde{\varphi}_4 = \pi/2. \tag{11}$$

- АТТ максимально отклонены в направлении отклонения вала от оси вращения или в противоположную сторону. Установившиеся движения этой группы не существуют на следующем интервале скоростей вращения ротора

$$(R_{\omega}^{(2)}, R_{\omega}^{(3)}) \quad R_{\omega}^{(2,3)} = \sqrt{1 + \frac{H^2}{4 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \mp \frac{H}{2 \operatorname{tg} \varphi_0}. \tag{12}$$

В установившихся движениях третьей группы

$$\tilde{\varphi}_5 = 0, \quad \tilde{\varphi}_6 = \pi. \tag{13}$$

В движении  $\tilde{\varphi}_5$  АТТ не отклонены, а в движении  $\tilde{\varphi}_6$  повернуты вокруг вторых осей вращения на  $180^\circ$ . В обоих движениях вторые оси вращения АТТ параллельны вектору отклонения вала от оси вращения. Положения АТТ в установившихся движениях этой группы изображены на рис. 2, д, е.

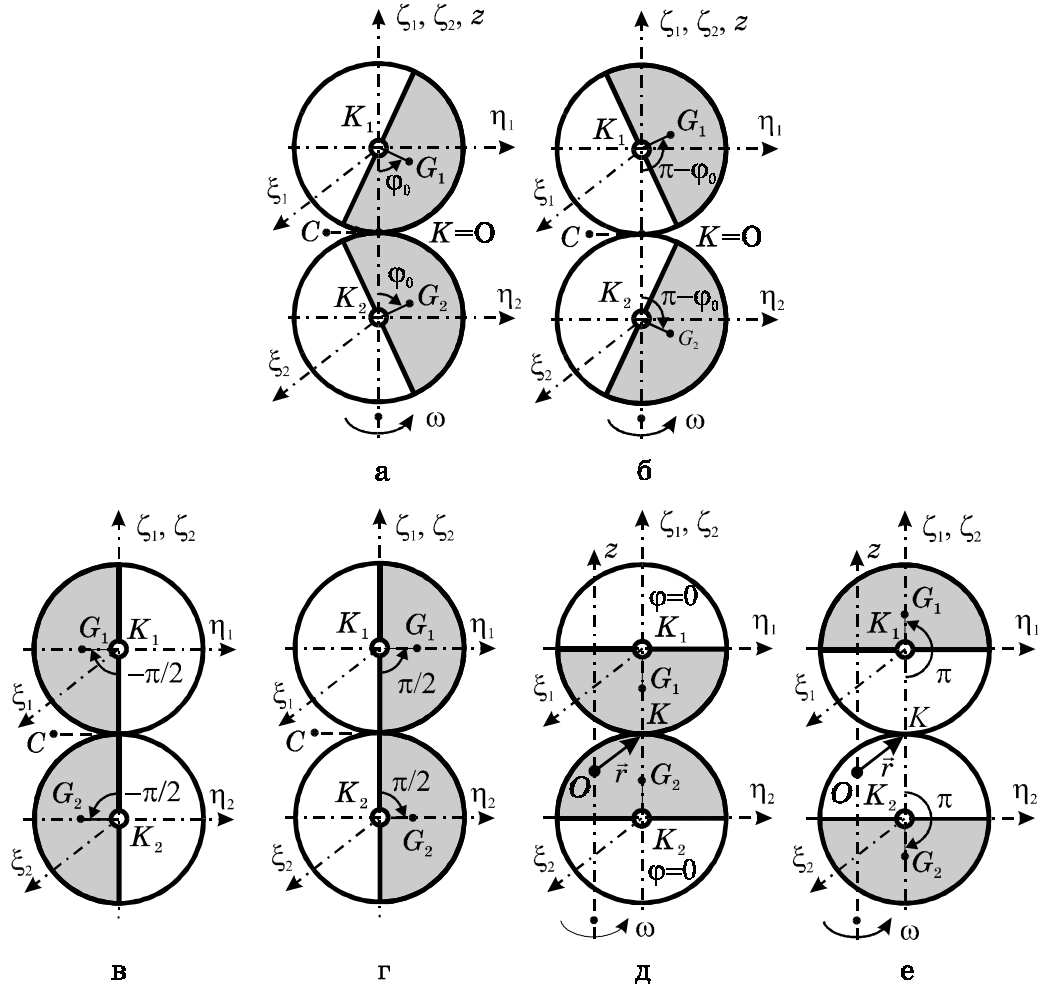


Рис. 2

4. Исследуем устойчивость установившихся движений.

4.1. Для установившихся движений первой группы введём возмущённое движение

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \quad \xi = u, \quad \eta = v, \quad (14)$$

где  $\alpha, \beta, u, v$  - отклонения от невозмущённого движения. Тогда уравнения первого приближения примут вид:

$$l_1 = \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} - [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \tilde{\psi} - (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \tilde{\psi}] \cos \tilde{\varphi} = 0,$$

$$l_2 = (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_p^2 - [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \cos \tilde{\psi} + (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \sin \tilde{\psi}] \sin \tilde{\varphi} = 0,$$

$$l_3 = \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u - R_m \left[ (\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) \cos \tilde{\varphi} - 2R_\omega \dot{\beta} \sin \tilde{\varphi} \right] \sin \tilde{\psi} + \\ + [(\ddot{\beta} - R_\omega^2 \beta) \sin \tilde{\varphi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\varphi}] \cos \tilde{\psi} = 0,$$

$$l_4 = \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v + R_m \left[ (\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) \cos \tilde{\varphi} - 2R_\omega \dot{\beta} \sin \tilde{\varphi} \right] \cos \tilde{\psi} - \\ - [(\ddot{\beta} - R_\omega^2 \beta) \sin \tilde{\varphi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\varphi}] \sin \tilde{\psi} = 0. \quad (15)$$

Вводим новые комплексные переменные

$$X = (u - iv)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad Y = \bar{X}, \quad \Phi = i(\alpha \cos \tilde{\varphi} + i\beta \sin \tilde{\varphi}), \quad F = \bar{\Phi}. \quad (16)$$

Преобразовываем левые части уравнений (15) по алгоритмам

$$L_1 = (l_3 + il_4)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad L_2 = (l_3 - il_4)e^{i\tilde{\psi}}, \quad L_3 = 2i(l_3 + il_4)e^{i\tilde{\psi}}, \quad L_4 = -2i(l_3 - il_4)e^{-i\tilde{\psi}},$$

$$p_1 = l_1 \frac{\cos \tilde{\psi}}{\cos \tilde{\varphi}} + l_2 \frac{\sin \tilde{\psi}}{\sin \tilde{\varphi}}, \quad p_2 = -l_1 \frac{\sin \tilde{\psi}}{\cos \tilde{\varphi}} + l_2 \frac{\cos \tilde{\psi}}{\sin \tilde{\varphi}}. \quad (17)$$

Тогда уравнения первого приближения примут вид:

$$L_1 = \ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + H(\dot{X} + iR_\omega X) + X + R_m(\ddot{\Phi} + 2iR_\omega \dot{\Phi} - R_\omega^2 \Phi) = 0,$$

$$L_2 = \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y + H(\dot{Y} - iR_\omega Y) + Y + R_m(\ddot{F} - 2iR_\omega \dot{F} - R_\omega^2 F) = 0,$$

$$L_3 = 2(\ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X) + (\ddot{\Phi} + h_1 \dot{\Phi}) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + (\ddot{\Phi} + h_2 \dot{\Phi}) \frac{R_p^2}{\sin^2 \tilde{\varphi}} -$$

$$- (\ddot{F} + h_1 \dot{F}) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + (\ddot{F} + h_2 \dot{F}) \frac{R_p^2}{\sin^2 \tilde{\varphi}} = 0,$$

$$L_4 = 2(\ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y) - (\ddot{\Phi} + h_1 \dot{\Phi}) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + (\ddot{\Phi} + h_2 \dot{\Phi}) \frac{R_p^2}{\sin^2 \tilde{\varphi}} +$$

$$+ (\ddot{F} + h_1 \dot{F}) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + (\ddot{F} + h_2 \dot{F}) \frac{R_p^2}{\sin^2 \tilde{\varphi}} = 0, \quad (18)$$

Введём коэффициенты

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2,$$

$$a_{33} = (\lambda^2 + h_2 \lambda) \frac{R_p^2}{\sin^2 \tilde{\varphi}}, \quad a_{44} = (\lambda^2 + h_1 \lambda) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}}. \quad (19)$$

Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$2a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} - R_m (a_{33} + a_{44}) (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) + 2R_m^2 a_{13}^2 \bar{a}_{13}^2 = 0. \quad (20)$$

Здесь знак сопряжения над  $a_{ij}$  к  $\lambda$  не относится.

Исследуем устойчивость основных движений в случае, когда масса АТТ намного меньше массы ротора:

$$R_m \ll 1. \quad (21)$$

В нулевом приближении характеристическое уравнение (20) принимает вид

$$2a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} = 0.$$

Его корни

$$\lambda_0^{(1,2)} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega, \quad \lambda_0^{(3,4)} = -\frac{H}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega,$$

$$\lambda_0^{(5)} = -h_1, \quad \lambda_0^{(6)} = -h_2, \quad \lambda_0^{(7,8)} = 0. \quad (22)$$

Первые шесть корней имеют отрицательную действительную часть. Поэтому устойчивость движения будут определять следующие приближения к двум последним – нулевым корням. Ищем разложения этих корней в виде

$$\lambda = R_m \lambda_1 + \dots \quad (23)$$

Подставляя (23) в (20), собирая коэффициенты при  $R_m^2$  и преобразовывая, получим следующее уравнение для определения  $\lambda_1^{(7,8)}$ :

$$\left[ (R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2 \right] R_\rho^2 h_1 h_2 \lambda_1^2 + (h_1 \sin^2 \tilde{\varphi} + h_2 R_\rho^2 \cos^2 \tilde{\varphi}) (R_\omega^2 - 1) R_\omega^4 \lambda_1 + R_\omega^8 \sin^2 \tilde{\varphi} \cos^2 \tilde{\varphi} = 0. \quad (24)$$

Корни этого уравнения будут иметь отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда все коэффициенты будут положительны. Из этого получаем следующее условие асимптотической устойчивости основных движений

$$|R_\omega| > 1. \quad (25)$$

Таким образом, в случае, когда масса АТТ намного меньше массы ротора, оба основных установившихся движения асимптотически устойчивы на зарезонансных скоростях вращения ротора и неустойчивы на дорезонансных скоростях.

**4.2.** Для установившихся движений второй группы введём возмущённое движение:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \quad \xi = \tilde{\xi} + u, \quad \eta = \tilde{\eta} + v. \quad (26)$$

Уравнения первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} l_1 &= \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} + R_\omega^2 (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) \alpha = 0, \\ l_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_\rho^2 + R_\omega^2 (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) \beta + [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \cos \tilde{\psi} + (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \sin \tilde{\psi}] \sin \tilde{\varphi} = 0, \\ l_3 &= \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H(\ddot{u} - R_\omega \dot{v}) + u + R_m [(\ddot{\beta} - R_\omega^2 \beta) \cos \tilde{\psi} - 2R_\omega \dot{\beta} \sin \tilde{\psi}] = 0, \\ l_4 &= \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H(\ddot{v} + R_\omega \dot{u}) + v + R_m [(\ddot{\beta} - R_\omega^2 \beta) \sin \tilde{\psi} + 2R_\omega \dot{\beta} \cos \tilde{\psi}] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Умножим третье уравнение в (9) на  $\sin \tilde{\psi}$  и отнимем четвёртое уравнение, умноженное на  $\cos \tilde{\psi}$ , получим

$$\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi} = \pm \frac{R_m R_\omega^2}{R_\omega^2 - 1} [1 + (u_0 \sin \tilde{\psi} - v_0 \cos \tilde{\psi})] = \pm R_m b, \quad (28)$$

$$b = \frac{R_\omega^2}{R_\omega^2 - 1} [1 + (u_0 \sin \tilde{\psi} - v_0 \cos \tilde{\psi})] \quad (29)$$

Вводим новые комплексные переменные

$$X = (u + iv)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad Y = \bar{X}. \quad (30)$$

Тогда система уравнений (27) преобразовывается к виду

$$\begin{aligned} l_1 &= \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} - R_m R_\omega^2 b \alpha = 0, \\ l_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_\rho^2 - R_m R_\omega^2 b \beta + \frac{1}{2} [\ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(l_3 + il_4)e^{-i\psi} &= \ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + H(\dot{X} + iR_\omega X) + X \mp R_m (\ddot{\beta} + 2iR_\omega \dot{\beta} - R_\omega^2 \beta) = 0, \\
(l_3 - il_4)e^{i\psi} &= \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y + H(\dot{Y} - iR_\omega Y) + Y \mp R_m (\ddot{\beta} - 2iR_\omega \dot{\beta} - R_\omega^2 \beta) = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Система распалась на две независимые подсистемы. Первое уравнение в (31) имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + h_1 \lambda - R_m R_\omega^2 b = 0. \tag{32}$$

Это уравнение будет иметь корни с отрицательными действительными частями, если его коэффициенты будут положительными. Учитывая (29) и то, что

$$1 \mp (u_0 \sin \tilde{\psi} - v_0 \cos \tilde{\psi}) > 0, \tag{33}$$

находим следующее необходимое условие асимптотической устойчивости второй группы установившихся движений

$$|R_\omega| < 1, \tag{34}$$

то есть ротор должен вращаться с дорезонансными скоростями.

Введём коэффициенты

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \quad a_{33} = (\lambda^2 + h_2 \lambda)R_p^2, \quad a_{44} = bR_\omega^2. \tag{35}$$

Тогда характеристическое уравнение второй подсистемы примет вид

$$a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} - \frac{R_m}{2} (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) - R_m a_{11} \bar{a}_{11} a_{44} = 0. \tag{36}$$

В случае, когда масса АТТ намного меньше массы ротора, характеристическое уравнение в нулевом приближении имеет вид

$$a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} = 0.$$

Его корни

$$\lambda_0^{(1,2)} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega, \quad \lambda_0^{(3,4)} = -\frac{H}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega, \quad \lambda_0^{(5)} = -h_2, \quad \lambda_0^{(6)} = 0. \tag{37}$$

Первые пять корней имеют отрицательную действительную часть. Поэтому устойчивость движения будет определять следующее приближение к последнему – нулевому корню. Ищем разложение этого корня в виде (23). Подставляя разложение в характеристическое уравнение (36), и собирая коэффициенты при  $R_m$ , получим следующее уравнение для определения  $\lambda_1^{(6)}$ :

$$\left[ (R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2 \right] R_p^2 h_2 \lambda_1 - (R_\omega^2 - 1) R_\omega^4 + \left[ (R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2 \right] b R_\omega^2 = 0. \tag{38}$$

Это уравнение будет иметь корень с отрицательной действительной частью, если его коэффициенты будут положительными. Учитывая это и условие (34), получаем, что установившиеся движения второй группы асимптотически устойчивы на докритических скоростях в области своего существования.

**4.3.** Для установившихся движений третьей группы вводим возмущённое движение (26). Тогда уравнения первого приближения примут вид



$$\begin{aligned}
l_1 &= \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} \pm R_\omega^2 (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) \beta \mp [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \tilde{\psi} - (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \tilde{\psi}] = 0, \\
l_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_\rho^2 \pm R_\omega^2 (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) \alpha = 0, \\
l_3 &= \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u \mp R_m [(\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) \sin \tilde{\psi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\psi}] = 0, \\
l_4 &= \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v \pm R_m [(\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) \cos \tilde{\psi} - 2R_\omega \dot{\alpha} \sin \tilde{\psi}] = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Из (9) и (13) можно найти, что

$$\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi} = (\pm) \tilde{r} = (\pm) \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \tag{40}$$

где  $(\pm)$  - означает неопределённый знак, не связанный с номером установившегося движения. Вводим комплексные переменные

$$X = (u + iv) e^{i\tilde{\psi}}, \quad Y = \bar{X}. \tag{41}$$

Тогда система уравнений (39) преобразовывается к виду

$$\begin{aligned}
l_1 &= \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} \pm (\pm) \tilde{r} R_\omega^2 \beta \mp \frac{1}{2} [\ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y] = 0, \\
l_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_\rho^2 \pm (\pm) \tilde{r} R_\omega^2 \alpha = 0, \\
(l_3 + il_4) e^{i\psi} &= \ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + H(\dot{X} + iR_\omega X) + X \mp R_m (\ddot{\alpha} + 2iR_\omega \dot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) = 0, \\
(l_3 - il_4) e^{-i\psi} &= \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y + H(\dot{Y} - iR_\omega Y) + Y \mp R_m (\ddot{\alpha} - 2iR_\omega \dot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) = 0.
\end{aligned} \tag{42}$$

Введём коэффициенты

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \quad a_{33} = (\lambda^2 + h_1 \lambda), \\
a_{34} &= \frac{R_\omega^4 e_0}{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \quad a_{44} = (\lambda^2 + h_2 \lambda) R_\rho^2.
\end{aligned} \tag{43}$$

Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} - \frac{R_m}{2} (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) a_{44} - R_m^2 a_{11} \bar{a}_{11} a_{34}^2 = 0. \tag{44}$$

Здесь знак сопряжения над  $a_{ij}$  к  $\lambda$  не относится.

В нулевом приближении характеристическое уравнение (44) принимает вид

$$a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} = 0.$$

Его корни

$$\begin{aligned}
\lambda_0^{(1,2)} &= -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega, \quad \lambda_0^{(3,4)} = -\frac{H}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega, \\
\lambda_0^{(5)} &= -h_1, \quad \lambda_0^{(6)} = -h_2, \quad \lambda_0^{(7,8)} = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, в нулевом приближении первые шесть корней имеют отрицательную действительную часть и два корня – нулевые. Поэтому устойчивость или неустойчивость побочных движений будут определять следующие приближения к нулевым корням. Ищем разложения этих корней в виде (23). Подставляя (23) в (44), собирая коэффициенты при  $R_m^2$  и преобразовывая, получим следующее уравнение для определения  $\lambda_1^{(7,8)}$

$$\left[ (R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2 \right] R_\rho^2 h_1 h_2 \lambda_1^2 + (R_\omega^2 - 1) R_\omega^4 R_\rho^2 h_2 \lambda_1 - R_\omega^8 e_0^2 = 0. \quad (46)$$

Поскольку не все коэффициенты полинома (46) положительны, то у него не менее одного корня с положительной действительной частью. Поэтому установившиеся движения третьей группы всегда неустойчивы.

Окончательно можно сделать следующие выводы об устойчивости установившихся движений системы в случае, когда масса АТТ намного меньше массы ротора:

1) на дорезонансных скоростях вращения ротора асимптотически устойчивы только те установившиеся движения, в которых АТТ максимально отклонено в более тяжёлую или лёгкую стороны ротора, а все остальные установившиеся движения неустойчивы;

2) на зарезонансных скоростях вращения ротора асимптотически устойчивы только основные движения, а побочные – неустойчивы.

**Р Е З Ю М Е .** Досліджена стійкість усталених рухів ротора, який зрівноважується двома зв'язаними абсолютно твердими тілами (АТТ). Ротор здійснює плоскопаралельний рух і розташований вертикально. АТТ можуть повертатися разом навколо подовжньої осі ротора і на рівні кути у протилежні боки навколо поперечних осей ротора. У випадку, коли маса тіл набагато менша за масу ротора, встановлено, що на зарезонансних швидкостях обертання ротора асимптотично стійкі тільки основні усталені рухи – рухи, у яких ротор найбільше зрівноважений.

**S U M M A R Y .** The stability of steady-state motions of the rotor balanced by two linked absolute rigid bodies (ARB) is investigated. The rotor performs the plane-parallel motions and is located vertically. ARB can turn together round the rotor centerline and on equal angles in opposite sides round the rotor cross-sectional axes. It is established in the case when ARB weight is much less than rotor weight and additionally the overresonance rotor rotation velocities are reached then only the basic steady-state motions – the motions in which the rotor is most balanced – are asymptotically stable.

1. Найфэ А. Введение в методы возмущений. - М.: Мир, 1984. - 535 с. (Nayfeh A. Introduction to Perturbation Techniques. – New York: Wiley, 1981.)
2. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 168 с.
3. Филимоныхин Г.Б. Об уравновешивании ротора маятниками, посаженными на оси, перпендикулярные валу // Доп. НАН України. - 2000. - №6. - С. 66-70.
4. Филимоныхин Г.Б. Уравновешивание ротора корректирующим грузом с неподвижной точкой на оси вала // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник “Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин”, - 2000. Вип.№29, С.103-108.
5. Філімоныхин Г.Б., Невдаха Ю.А. Зменшення чутливості автобалансирів до сил ваги шляхом накладання в'язей // Збірник наукових праць КДТУ, -2000. Вип.№6, С.76-78.
6. Boruk I.G., Lobas L.G. Stability of Equilibrium for an Inverted Two-Link Mathematical Pendulum with Critical Tracking Forces // Int. Appl. Mech. – 1999. – 35, N 9. – P. 962 - 967.
7. Martynyuk A.A., Miladzhyanov V.G. The Theory of Stability of an Orbiting with Cyroscopic Stabilization of Motion // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 5. – P. 682 - 690.
8. Plakhtienko N.P., Shifrin B.M. Stability of Motion of Two-Mass System with Nonlinear Friction // Int. Appl. Mech. – 1999. – 35, N 8. – P. 846 - 852.
9. Zakrzhevskii A.E. The Dynamics of Systems of Rigid and Elastic Bodies as Applied to Spacecraft // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 8. – P. 1001 - 1036.

Кировоград. гос. техн. ун-т  
(Украина)

Поступила 25.12.2000